

Параметрични трептения на двумасова механична система

Велина Боздуганова

***Parametric Vibrations of Double-lumped-mass System.** A mathematical model of a mechanical system composed of a double mathematical pendulum is derived. The second pendulum has harmonically varying: length, and relative angle of deviation about the first one. The friction in the fixed joint is viscous while the moving one is perfectly frictionless. The aerodynamic drag, applied to the second lumped mass varies linearly. Some swing dynamic characteristics are investigated numerically and the influence of the system parameter variation on these characteristics is estimated.*

Key words: double-lumped-mass system, double pendulum, parametric vibrations, swing dynamics

ВЪВЕДЕНИЕ

Параметрични трептения на механична система възникват, когато има периодично изменение на някой от параметрите на системата. Математичното махало с периодично изменящи се параметри е класически модел за изучаване на такъв вид трептения на механична система [3, 6]. Този модел дава възможност да се получи обяснение на процеса „люлеене чрез самозасилване“ [10]. Известно е, че при определени съотношения между собствената и възбуждащата честоти, устойчивото равновесно положение на махалото се превръща в неустойчиво [4].

Моделът математично махало с променлива дължина като симулатор на люлка е изучаван в различни аспекти. Периодичното приклякване и изправяне на люлеещия се човек с модулирана честота може да породи и да поддържа люлеенето. Този начин на самозасилване не е типичен, но съществено опростява математичния модел и затова той е изследван най-често [3, 10, 6, 7, 5, 4, 8]. Дисипацията на енергия при люлеенето обикновено се моделира като вискозно триене в ставата и от въздушната среда [5].

Типичният стил на самозасилване на изправен човек е с едновременно надлъжно и напречно периодично движение на масовия му център. За него в [1] е предложен едномасов динамичен модел с двупараметрично възбуждане и сухо триене в цилиндричната става. В [2] е изследвана двумасова механична система, състояща се от математично махало и подвижна маса, която се премества едновременно по оста на махалото и напречно на него по зададени периодични закони. Съпротивителният момент в ставата и аеродинамичната съпротивителна сила, действаща на подвижната маса, се задават с линейни зависимости от скоростите.

Особеност на силите, които пораждаат резонансни трептения на махалото-люлка е, че са вътрешни за системата и са предварително неизвестни. Те могат да бъдат определени чрез задаване на управляващи програми като явни функции на времето [9].

В предлаганата работа люлеенето чрез самозасилване на изправен човек се моделира с двумасова дискретна механична система, представляваща две махала: първото, с постоянна дължина, моделира люлката; второто, с променлива дължина, моделира човека. Махалото с променлива дължина извършва зададени хармонични ъгли и надлъжни трептения.

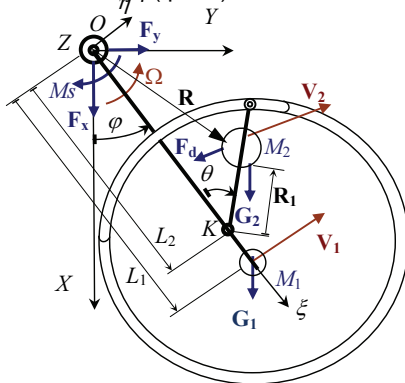
МАТЕМАТИЧЕН МОДЕЛ

Разглеждаме механична система, съставена от двойно математично махало OM_1 и KM_2 , като второто махало е с хармонично изменящи се дължина и относителен ъгъл на отклонение (фиг. 1), зададени със законите

$$R_1 = R_0 + H_1 \sin(2\Omega_0 T), \quad (1)$$

$$\theta = H_2 \sin(\Omega_0 T).$$

Собствената кръгова честота на системата при липса на относително движение на второто махало е $\Omega_0 = [(m_1 L_1 + m_2(L_2 - R_0))g / (m_1 L_1^2 + m_2(L_2 - R_0)^2)]^{1/2}$; приведената дължина е $L = g/\Omega_0^2$; R_0 , $L_1 \equiv OM_1$, $L_2 \equiv OK$, H_1 и H_2 са положителни константи; T е произволен момент от времето; g е големината на гравитационното ускорение; $\mathbf{R} = (L_2 - R_1 \cos \theta) \mathbf{i} + R_1 \sin \theta \mathbf{j}$; \mathbf{i} и \mathbf{j} са единичните вектори на осите $O\xi$ и $O\eta$ на релативната координатна система $O\xi\eta$ (фиг.1).



Фиг. 1. Двойно математично махало

Положението на разглежданата механична система относно абсолютната координатна система $OXYZ$ се определя с три обобщени координати: φ , θ и R_1 . Върху механичната система са приложени следните външни сили: теглата $\mathbf{G}_1 \equiv m_1 \mathbf{g}$, $\mathbf{G}_2 \equiv m_2 \mathbf{g}$; динамата $(\mathbf{F}, \mathbf{M}_S)$ на реакционните сили на неидеалната цилиндрична става, редуцирани в точка O и аеродинамичната съпротивителна сила \mathbf{F}_D (фиг. 1).

Реакцията \mathbf{F} на цилиндричната става се определя от нейните компоненти F_x , F_y по осите OX и OY .

Съпротивителният момент от вискозно триене в ставата има мярка $M_S = -K_1 \Omega$, където K_1 е съпротивителен коефициент, Ω – мярката на ъгловата скорост на махалото OM_1 .

Аеродинамичната съпротивителна сила се изменя по линеен закон $\mathbf{F}_D = -K_2 \mathbf{V}_2$, където K_2 е коефициентът на аеродинамично съпротивление, а \mathbf{V}_2 е абсолютната скорост на точка M_2 .

Абсолютните скорости на материалните точки M_1 и M_2 са:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= L_1 \Omega \mathbf{j}; \\ \mathbf{V}_2 &= -[dR_1/dT \cos \theta + R_1(\Omega - d\theta/dT) \sin \theta] \mathbf{i} + [dR_1/dT \sin \theta - R_1(\Omega - d\theta/dT) \cos \theta + L_2 \Omega] \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Абсолютните ускорения на точките M_1 и M_2 се определят със зависимостите

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= -L_1 \Omega^2 \mathbf{i} + L_1 (d\Omega/dT) \mathbf{j}, \\ \mathbf{b}_2 &= -[d^2 R_1/dT^2 \cos \theta + 2\Omega dR_1/dT \sin \theta + R_1 d\Omega/dT \sin \theta - R_1 \Omega^2 \cos \theta + \Omega^2 L_2 - \\ &\quad - R_1 (d\theta/dT)^2 \cos \theta + 2\Omega R_1 d\theta/dT \cos \theta - d^2 \theta/dT^2 R_1 \sin \theta - 2dR_1/dT d\theta/dT \sin \theta] \mathbf{i} + \\ &\quad + [d^2 R_1/dT^2 \sin \theta - 2\Omega dR_1/dT \cos \theta - R_1 d\Omega/dT \cos \theta - R_1 \Omega^2 \sin \theta + L_2 d\Omega/dT - \\ &\quad - R_1 (d\theta/dT)^2 \sin \theta + 2\Omega R_1 d\theta/dT \sin \theta + d^2 \theta/dT^2 R_1 \cos \theta + 2dR_1/dT d\theta/dT \cos \theta] \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (3)$$

Абсолютната кинетична енергия на системата е $E_k = (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2)/2$.

За описване на динамичното състояние на разглежданата механична система ще използваме проекциите върху осите OX и OY на теоремата за изменение на количеството на движение

$$d\mathbf{Q}/dT = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{F} + \mathbf{F}_D \quad (4)$$

и проекцията върху оста OZ на теоремата за изменение на кинетичния момент

$$d\mathbf{K}_O/dT = L_1 \mathbf{i} \times \mathbf{G}_1 + \mathbf{R} \times \mathbf{G}_2 + \mathbf{M}_S + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_D, \quad (5)$$

където: $\mathbf{Q} = m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2$; $\mathbf{K}_O = L_1 \mathbf{i} \times m_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{R} \times m_2 \mathbf{V}_2$.

Въвеждаме следните безразмерни величини и означения:

$$\begin{aligned} r_1 &= R_1/L; \quad l_2 = L_2/L; \quad r^2 = l_2^2 + r_1^2 - 2l_2r_1\cos\theta, \\ r_0 &= R_0/L; \quad h_1 = H_1/L; \quad h_2 = H_2; \\ \lambda &= L_1/L; \quad t = T(g/L)^{1/2}; \\ r_{11} &\equiv dr_1/dt = (dR_1/dT)/(Lg)^{1/2}; \\ \theta_1 &\equiv d\theta/dt = (d\theta/dT)/(g/L)^{1/2}; \\ \omega &= \Omega(L/g)^{1/2}; \quad \omega_0 = \Omega_0(L/g)^{1/2}; \\ v_1 &= V_1/(Lg)^{1/2}; \quad v_2 = V_2/(Lg)^{1/2}; \\ r_{12} &\equiv d^2r_1/dt^2 = (d^2R_1/dT^2)/(Lg); \\ \theta_2 &\equiv d^2\theta/dt^2 = (d^2\theta/dT^2)/(g/L); \\ a &= |\mathbf{b}_2|/g; \quad d\omega/dt = (d\Omega/dT)(L/g); \\ m &= m_1/m_2; \quad m_S = M_S/(m_2gL); \\ f_x &= F_x/m_2g; \quad f_y = F_y/m_2g; \\ f &= F/m_2g; \quad f_D = F_D/m_2g; \\ k_1 &= K_1/[m_2(L^3g)^{1/2}]; \quad k_2 = K_2/[m_2(g/L)^{1/2}]; \\ e_k &= E_k/m_2gL. \end{aligned} \quad (6)$$

С помощта на зависимостите (1)-(6) получаваме следния математичен модел в безразмерен вид

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= \omega, \quad \varphi(t=0) = \varphi(0); \\ d\omega/dt &= \{-[2(r_1r_{11} - l_2r_{11}\cos\theta + l_2r_1\theta_1\sin\theta) + k_1 + k_2r^2]\omega - \\ &\quad l_2r_{12}\sin\theta - 2l_2r_{11}\theta_1\cos\theta + 2r_1r_{11}\theta_1 - l_2r_1\theta_2\cos\theta + \\ &\quad r_1^2\theta_2 + l_2r_1\theta_1^2\cos\theta - (m\lambda + l_2 - r_1\cos\theta)\sin\varphi - \\ &\quad r_1\sin\theta\cos\varphi - k_2(l_2r_{11}\sin\theta + l_2r_1\theta_1\cos\theta - r_1^2\theta_1)\}(m\lambda^2 + r^2), \quad \omega(t=0) = \omega(0); \\ f_\xi &= r_1d\omega/dt\sin\theta + \omega(2r_{11}\sin\theta + 2r_1\theta_1\cos\theta + k_2r_1\sin\theta + r_1^2\theta_2) + \\ &\quad \omega^2(m\lambda + l_2 - r_1\cos\theta) + r_{12}\cos\theta - 2r_{11}\theta_1\sin\theta - r_1\theta_2\sin\theta - \\ &\quad r_1\theta_1^2\cos\theta + k_2(r_{11}\cos\theta - r_1\theta_1\sin\theta) + (m+1)\cos\varphi; \\ f_\eta &= d\omega/dt(m\lambda + l_2 - r_1\cos\theta) + \omega[-2r_{11}\cos\theta + 2r_1\theta_1\sin\theta + k_2(l_2 - r_1\cos\theta)] - \\ &\quad \omega^2r_1\sin\theta + r_{12}\sin\theta + 2r_{11}\theta_1\cos\theta + r_1\theta_2\cos\theta - r_1\theta_1^2\sin\theta + \\ &\quad k_2(r_{11}\sin\theta + r_1\theta_1\cos\theta) + (m+1)\sin\varphi; \\ f_x &= f_\xi\cos\varphi - f_\eta\sin\varphi, \quad f_y = f_\xi\sin\varphi + f_\eta\cos\varphi, \quad f = (f_x^2 + f_y^2)^{1/2}, \\ m_S &= -k_1\omega, \quad e_k = (mv_1^2 + v_2^2)/2. \end{aligned} \quad (7)$$

Управляващите функции (1) приемат следния безразмерен вид

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 + h_1\sin(2\omega_0 t), \\ \theta &= h_2\sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (8)$$

РЕЗУЛТАТИ ОТ ЧИСЛЕНИТЕ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Численото интегриране на диференциалните уравнения в (7) е осъществено с програмата ode113 на MATLAB® при относителна точност 10^{-8} и абсолютна точност 10^{-10} .

Математичният модел има следните безразмерни параметри: $\lambda, m, k_1, k_2, r_0, h_1, h_2, \varphi(0), \omega(0)$. При числените експерименти са избрани следните стойности на изходните параметри: $m_1 = 10 \text{ kg}$; $m_2 = 20 \text{ kg}$; $R_0 = 0.6 \text{ m}$; $L_1 = L_2 = 3.4 \text{ m}$; $\varphi(0) = 0$; $\Omega(0) = 0$; $K_1 = 0.3 \text{ kgm}^2/\text{s}$; $K_2 = 2 \text{ kg/s}$; $H_1 = 0.4 \text{ m}$; $H_2 = 0.3 \text{ rad}$.

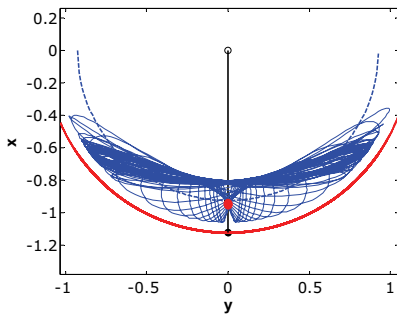
На фиг. 2а са представени траекториите на точките M_1 и M_2 в безразмерен вид, получени за $0 \leq T \leq 300$ s. Същите траектории, но в разширеното конфигурационно пространство, са показани на фиг. 2б. Максималният ъгъл на отклонение е $\varphi_{max} = 69^\circ$.

От фазовата диаграма $\omega = \omega(\varphi)$ (фиг. 2в) на люлката се вижда, че началното ѝ състояние е неустойчиво. Фазовата траектория почти монотонно се отдалечава от началото, достига максимално отклонение и преминава в граничен цикъл (установено движение), за който $\varphi < \varphi_{max}$.

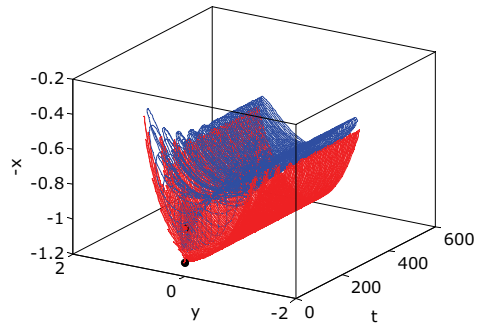
Изменението на посоката и големината на безразмерната реакция в неподвижната става е показано на фиг. 2г. Максималната стойност на реакцията е $F_{max} = 653$ N.

Динамичното въздействие върху човека при люлеенето може да се оцени с максималното претоварване (отношението на големината на ускорението на M_2 към земното). На фиг. 2д е изобразена зависимостта на претоварването от ъгъла на отклонение на люлката. Максималната стойност на претоварването ($a_{max} = 1.04$) се появява в преходния режим, но се преминава много бързо. Претоварването в установен режим на люлеене е $a < 1$, което е благоприятно за люлеенето на деца.

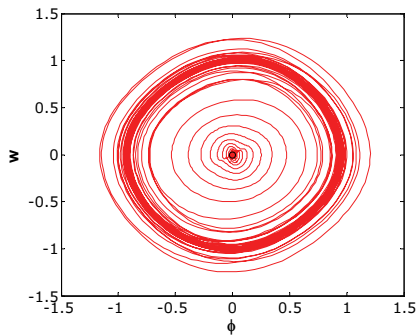
Кинетичната енергия на системата интензивно нараства с увеличаване на амплитудата (фиг. 2е), като максималната стойност на енергията е различна при преминаване на люлката през вертикалното положение в едната и в противоположната посока.



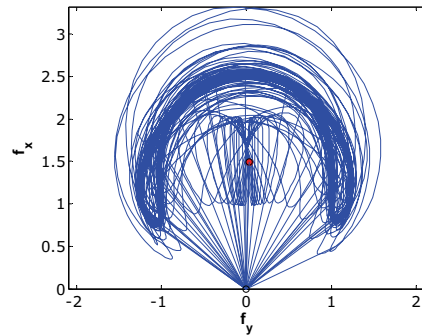
а)



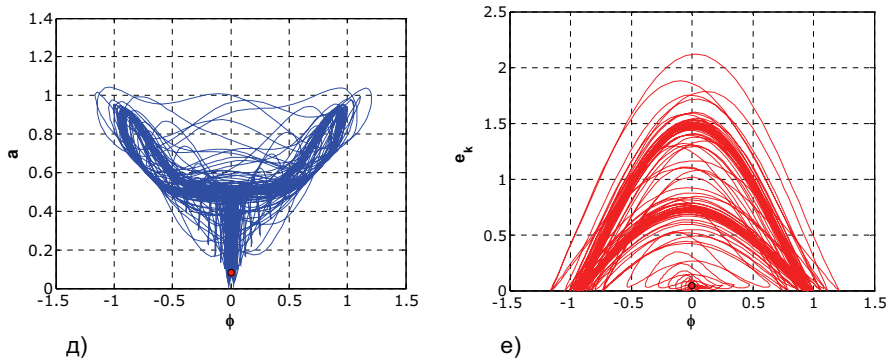
б)



в)



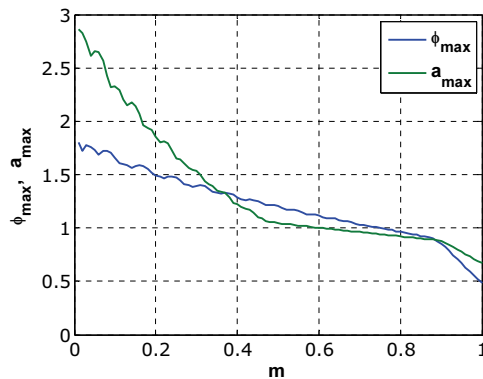
г)



Фиг. 2. Резултати от числените експерименти

На фиг. 3 е илюстрирано влиянието на изменението на отношението m на масите на люлката и човека върху максималния ъгъл φ_{max} на отклонение на люлката и претоварването a_{max} . Безопасни стойности на претоварването се постигат при $m \geq 1/2$.

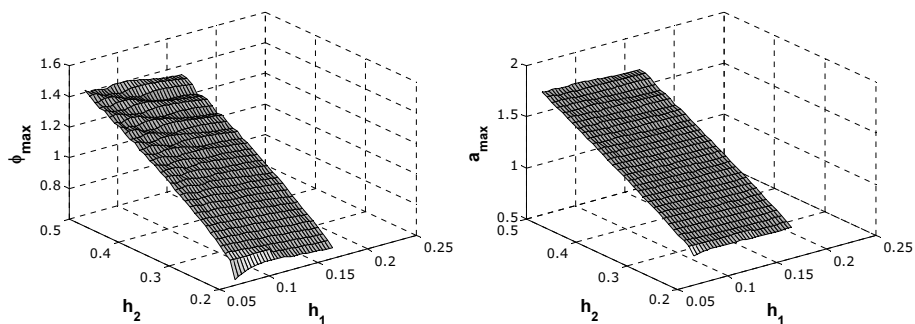
На фиг. 4 е отразено влиянието на изменението в съответните граници на безразмерните амплитуди h_1 и h_2 върху максималния ъгъл на отклонение на люлката и максималното претоварване. Вижда се, че максималният ъгъл и максималното претоварване са слабо чувствителни при изменението на амплитудата h_1 и нарастват почти линейно с увеличаването на другата амплитуда h_2 .



Фиг. 3. Функциите $\varphi_{max}(m)$ и $a_{max}(m)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Използваният модел достоверно описва динамичното поведение на изследваната система. В сравнение с подобен предходен модел [2] той дава по-добри резултати за максималното претоварване и почти същото максимално отклонение за приблизително същото време.



Фиг. 4. Функциите $\varphi_{max}(h_1, h_2)$ и $a_{max}(h_1, h_2)$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боздуганова, В.С., В.Г. Витлиевов. Динамика на махало с променлива дължина и сухо триене като симулатор на люлка. Механика на машините, Т. 17 (82), № 3, 45-48, 2009.

[2] Боздуганова, В.С., В.Г. Витлиевов. Трептения на двумасова дискретна механична система с двупараметрично възбуждане. Механика на машините, 2011 (под печат).

[3] Магнус, К. Колебания. Мир, Москва, 1982.

[4] Сейранян, А.П., А.О. Беляков. Динамика качелей. Доклады РАН, Т. 421, №1, 54-60, 2008.

[5] Bae, S., Y.-H. Kang. Optimal pumping in a model of a swing. European Journal of Physics, Vol. 27, 75-86, 2006.

[6] Pinsky, M.A., A.A. Zevin. Oscillations of a pendulum with a periodically varying length and a model of swing. International Journal on Non-Linear Mechanics, Vol. 34, 105-109, 1999.

[7] Stilling, D. S. D., W. Szyszkowski. Controlling angular oscillations through mass reconfiguration: a variable length pendulum case. International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 37, No. 1, 89-99, 2002.

[8] Strub, D.C. How do Childern Swing? Master Thesis. Department of Engineering Mathematics, University of Bristol, 2009.

[9] Udwadia, F.E., R.E. Kalaba. Analytical Dynamics: A New Approach. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[10] Wirkus, S., R. Rand, A. Ruina. How to pump a swing. The College Mathematics Journal, Vol. 29, No. 4, 266-275, 1998.

За контакти:

Д-р инж. Велина Боздуганова, Катедра "Техническа механика", Русенски университет "Ангел Кънчев", тел.: 082-888 572, e-mail: velina@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран