

## Грешка на оценката на амплитудата и фазовият ъгъл на хармониците при метод за комплексен двупрофилен контрол на зъбни колела без еталонно колело

Младен Петров, Тошо Станчев

*Error of the assessment of the amplitude and phase angle of harmonics in a complex method using Double flank Gear Test without reference gear. Proposed a method of control is based on the classic dual-flank computerized measurement without use of a standard gear for three randomly measured gears with the same number of teeth. They have their own kinematic errors representing complex periodic functions that can be represented as the sum of consecutive harmonic oscillations. The article provides an analysis of the error evaluation of the amplitudes and phase angles of harmonic calculated by Fourier method of signals obtained from the radial variations of slack-free mesh two gears, using the classical method for determining the error of indirect measurements.*

**Keywords:** - Metrology, Gears, Dual-flank gear test, Measurement errors.

Предлаганият комплексен метод за двупрофилен контрол се основава на компютризирано класическо двупрофилно измерване без използване на еталонно зъбно колело на три произволно взети измервани зъбни колела с еднакъв брой зъби. Когато двойка реални зъбни колела с едни и същи геометрични показатели се зацепят двупрофилно, т.е. безхлабинно, то грешките им в радиално направление се сумират и променя тяхното измервателно междуцентрово разстояние (ИМП) [1] и [2]. Тази промяна се отчита за определена ъглова стъпка и в резултат на измерването на достатъчен брой промени на ИМП, се получава сумарен вектор (фиг. 2), по който се построява амплитудно-времева диаграма (фиг.4а,б).

Трите зъбни колела с условни номера 1, 2 и 3 притежават собствени кинематични грешки  $F''_{ir}$ , представляващи сложни периодични честотни функции, които могат да бъдат представени като сума от хармонични колебания от вида:

$$V_i = A_0 + \sum_{j=1}^k (A_j \sin(\rho_i \cdot j + \theta_i)) \quad (1)$$

където:  $i = 0 \div (n - 1)$  текущ номер на стойността на функцията (номер на измерената стойност от линейния преобразувател),  $n$  – максимален брой ъглови дискретизации (в случая  $n=2500$ );

$j = 1 \div k$  - текущ номер на хармоника (според теоремата на Котелников,  $k \leq n/2$ );

$\rho_i = \frac{2\pi}{n} \cdot i$  – ъгъл на завъртане на кръговия измервателен преобразувател, на който се отчита стойността на изменението на радиусвектора  $V_i$  от линейния измервателен преобразувател;

$A_0$  – постоянна съставляваща на радиусвектора  $V_i$  (входния сигнал). В случая, когато стойностите на входящия сигнал са „центрирани“ ( $V_i = V_i - \bar{V}$ ), стойността ѝ е нула;

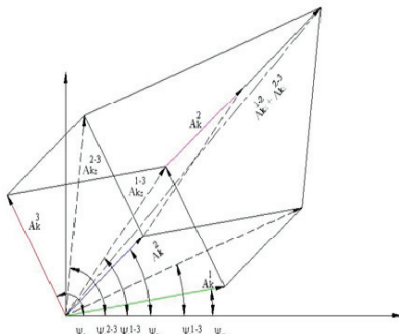
$A_j$  – стойности на амплитудите на  $j$ -тия хармоник;

$\theta_j$  – стойности на фазовият ъгъл на  $j$ -тия хармоник;

Контролираните зъбни колела образуват три измервателни двойки 1-2; 1-3, 2-3, съставени само от измервани зъбни колела. Извършват се три измервания със стандартен междуцентромер при двупрофилно зацепване при едни и същи начални положения и посоки на въртене на всяко зъбно колело, т.е. при фиксирани начални фази на колебанията в следната последователност:

- първо измерване - зацепват се зъбно колело 1 със зъбно колело 2;

- второ измерване - зацепват се зъбно колело 1 със зъбно колело 3;
- трето измерване - зацепват се зъбно колело 2 със зъбно колело 3;



Фиг. 1

В резултат на това се получават собствените /действителни/ кинематични грешки на всяко измервано зъбно колело.

По метода на трите колела, оценката на първия хармоник, еквивалентен на радиалното биене на зъбното колело, се получава след пресмятането на векторни уравнения 2. Фиг.1 илюстрира сумирането само за една двойка зъбни колела:

$$\begin{aligned} \vec{A1}_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\vec{A12}_1 + \vec{A13}_1 - \vec{A23}_1) \\ \vec{A2}_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\vec{A12}_1 + \vec{A23}_1 - \vec{A13}_1) \\ \vec{A3}_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\vec{A13}_1 + \vec{A23}_1 - \vec{A12}_1) \end{aligned} \quad (2)$$

На практика, реалната и имагинерната част на търсените вектори  $\vec{A12}_1$ ,  $\vec{A13}_1$  и  $\vec{A23}_1$  се получават като алгебрична сума на компонентите на векторите (3 и 4):

$$\begin{aligned} Ax1_1 &= \frac{1}{2} \cdot (Ax12_1 + Ax13_1 - Ax23_1) & Ay1_1 &= \frac{1}{2} \cdot (Ay12_1 + Ay13_1 - Ay23_1) \\ Ax2_1 &= \frac{1}{2} \cdot (Ax12_1 + Ax23_1 - Ax13_1) & Ay2_1 &= \frac{1}{2} \cdot (Ay12_1 + Ay23_1 - Ay13_1) \\ Ax3_1 &= \frac{1}{2} \cdot (Ax23_1 + Ax13_1 - Ax12_1) & Ay3_1 &= \frac{1}{2} \cdot (Ay12_1 + Ay13_1 - Ay23_1) \end{aligned} \quad (3 \text{ и } 4)$$

Реалната (по абсцисата – ос X) и имагинерната (по ординатата – ос Y) част на вектора на j-тата амплитуда се получават като се приложи класическият анализ на Фурие [4], известен още като Хармоничен анализ, при който функцията на изменение на дължината на радиусвектора за един оборот на зъбното колело, която е типична периодична функция, се разлага на прости периодични функции, със съответната амплитуда  $A_j$ , фазов ъгъл  $\theta_j$  и честота  $j$ .

$$Ax(V_L, \rho_L)_j = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} V_i \cdot \sin(\rho_i \cdot j) \quad Ay(V_L, \rho_L)_j = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} V_i \cdot \cos(\rho_i \cdot j) \quad (5) \text{ и } (6)$$

Във зависимости 5 и 6 реалната  $Ax(V_L, \rho_L)_j$  и имагинерната част  $Ay(V_L, \rho_L)_j$  на вектора на амплитудата са представени като функции, зависещи от промяната на радиусвектора и  $V_i$  и  $\rho_i$  – ъгъла на завъртане на зъбното колело, на който се отчита промяната на радиус-вектора - стойности, които се отчитат от измервателните преобразуватели и които влияят върху грешката на измерване.

Амплитудата на j-тия хармоник  $A(V_L, \rho_L)_j$  и фазовият ъгъл  $\theta_j$  се получават:

$$A(V_L, \rho_L)_j = \sqrt{Ax(V_L, \rho_L)_j^2 + Ay(V_L, \rho_L)_j^2} \quad \theta(V_L, \rho_L)_j = \tan^{-1} \left[ \frac{Ax(V_L, \rho_L)_j}{Ay(V_L, \rho_L)_j} \right] \quad (7) \text{ и } (8)$$

### Пресмятане на грешката на метода на трите колела

Според класическият алгоритъм [4] за пресмятане на грешки от косвени измервания, грешката на оценката на j-тата амплитуда и съответният ѝ фазов ъгъл, зависи от грешките на линейния ( $\delta V$ ) и кръговия ( $\delta \rho$ ) измервателен преобразувател, претеглени с тегловен коефициент равен на числената стойност на първата производна на функцията, по която се получава съответните величини (5, 6 и 7, 8):

$$f(V_i, \rho_i) = \sqrt{\sum_{n=0}^{n-1} \delta V^2 \cdot \left( \frac{\partial f(V_i, \rho_i)}{\partial V_i} \right)^2 + \sum_{n=0}^{n-1} \delta \rho^2 \cdot \left( \frac{\partial f(V_i, \rho_i)}{\partial \rho_i} \right)^2} \quad (9)$$

Където:  $\frac{\partial f(V_i, \rho_i)}{\partial V_i}$  е частната първа производна на функцията (5, 6, 7, 8) спрямо  $V_i$ ;

$\frac{\partial f(V_i, \rho_i)}{\partial \rho_i}$  е частната първа производна на функцията спрямо  $\rho_i$

$\delta\rho$  – грешка на ъгловата дискретизация.

$\delta V$  – грешка на измервателния преобразувател за линейни премествания, отчитащ промяната на радиусектора  $V_i$  (входния сигнал).

В случая грешката на оценката зависи от броя на измерените стойности  $n=2500$  на  $V_i$  и  $\rho_i$ .

- частни производни на зависимости 2.5 и 2.6 спрямо  $V_i$

$$\frac{\partial Ax(V_i, \rho_i)}{\partial V_i} = \frac{2}{n} \cdot \sin(\rho_i \cdot j) \quad \text{и} \quad \frac{\partial Ay(V_i, \rho_i)}{\partial V_i} = \frac{2}{n} \cdot \cos(\rho_i \cdot j) \quad (10)$$

- частни производни на зависимости 2.5 и 2.6 спрямо  $\rho_i$

$$\frac{\partial Ax(V_i, \rho_i)}{\partial \rho_i} = \frac{2}{n} \cdot j \cdot V_i \cdot \cos(\rho_i \cdot j) \quad \text{и} \quad \frac{\partial Ay(V_i, \rho_i)}{\partial \rho_i} = -\frac{2}{n} \cdot j \cdot V_i \cdot \sin(\rho_i \cdot j) \quad (11)$$

Замествайки 10 и 11 в зависимост 9 и имайки предвид, че сумата  $\sum_{i=0}^{n-1} (\sin(\rho_i \cdot j))^2 = \frac{n}{2}$  и  $\sum_{i=0}^{n-1} (\cos(\rho_i \cdot j))^2 = \frac{n}{2}$ , се получава грешката на оценката на реалната и имагинерната част на амплитудата  $\delta Ax(V_i, \rho_i)$  и  $\delta Ay(V_i, \rho_i)$ :

$$\delta Ax(V_i, \rho_i) = \frac{2}{n} \sqrt{\delta V^2 \cdot \frac{n}{2} + \delta \rho^2 \cdot j^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} V_i^2 \cdot (\cos(\rho_i \cdot j))^2} \quad (12)$$

$$\delta Ay(V_i, \rho_i) = \frac{2}{n} \sqrt{\delta V^2 \cdot \frac{n}{2} + \delta \rho^2 \cdot j^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} V_i^2 \cdot (\sin(\rho_i \cdot j))^2} \quad (13)$$

Амплитудите и фазовите им ъгли се получават по зависимости 7 и 8. Грешката на оценката на амплитудата се получава по зависимост 9, след като се определят частните производни:

$$\frac{\partial A(Ax(V_i, \rho_i)_j, Ay(V_i, \rho_i)_j)}{\partial Ax(V_i, \rho_i)_j} = \frac{Ax(V_i, \rho_i)_j}{\sqrt{Ax(V_i, \rho_i)_j^2 + Ay(V_i, \rho_i)_j^2}} = \frac{Ax(V_i, \rho_i)_j}{A(V_i, \rho_i)_j} \quad (14)$$

$$\frac{\partial A(Ax(V_i, \rho_i)_j, Ay(V_i, \rho_i)_j)}{\partial Ay(V_i, \rho_i)_j} = \frac{Ay(V_i, \rho_i)_j}{\sqrt{Ax(V_i, \rho_i)_j^2 + Ay(V_i, \rho_i)_j^2}} = \frac{Ay(V_i, \rho_i)_j}{A(V_i, \rho_i)_j} \quad (15)$$

$$\delta A(Ax(V_i, \rho_i)_j, Ay(V_i, \rho_i)_j) = \sqrt{\left(\frac{Ax(V_i, \rho_i)_j}{A(V_i, \rho_i)_j}\right)^2 \cdot \delta Ax(V_i, \rho_i)_j^2 + \left(\frac{Ay(V_i, \rho_i)_j}{A(V_i, \rho_i)_j}\right)^2 \cdot \delta Ay(V_i, \rho_i)_j^2} \quad (16)$$

След заместване на 12 и 13 в 16, се получава функцията на грешката на  $j$ -тата амплитуда спрямо грешките на линейния ( $\delta V$ ) и кръговия ( $\delta\rho$ ) измервателен преобразувател и отчетените стойности  $V_i$  на ъгъл  $\rho_i$ . Като се вземе предвид и зависимост 7, се получава:

$$\delta A(V_i, \rho_i)_j = \sqrt{\delta V^2 \cdot \frac{2}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \delta \rho^2 \cdot j^2 \cdot \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-1} (V_i \cdot \cos(\rho_i \cdot j))^2\right) \cdot (Ax(V_i, \rho_i)_j)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} (V_i \cdot \sin(\rho_i \cdot j))^2\right) \cdot (Ay(V_i, \rho_i)_j)^2}{(A(V_i, \rho_i)_j)^2}} \quad (17)$$

Грешката на оценката на фазовия ъгъл  $\delta\theta(Ax(V_i, \rho_i)_j, Ay(V_i, \rho_i)_j)$  се получава по зависимост 9, след като се определят частните производни спрямо реалната и имагинерната компонента на вектора на амплитудата:

$$\frac{\partial \theta(Ax(V_i, \rho_i)_j, Ay(V_i, \rho_i)_j)}{\partial Ax(V_i, \rho_i)_j} = \frac{Ay(V_i, \rho_i)_j}{Ax(V_i, \rho_i)_j^2 + Ay(V_i, \rho_i)_j^2} = \frac{Ay(V_i, \rho_i)_j}{A(V_i, \rho_i)_j^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta(Ax(V_i, \rho_i)_j, Ay(V_i, \rho_i)_j)}{\partial Ay(V_i, \rho_i)_j} = \frac{-Ax(V_i, \rho_i)_j}{Ax(V_i, \rho_i)_j^2 + Ay(V_i, \rho_i)_j^2} = \frac{-Ax(V_i, \rho_i)_j}{A(V_i, \rho_i)_j^2} \quad (19)$$

$$\delta \theta(Ax(V_i, \rho_i)_j, Ay(V_i, \rho_i)_j) = \sqrt{\left(\frac{Ay(V_i, \rho_i)_j}{A(V_i, \rho_i)_j^2}\right)^2 \cdot \delta Ax(V_i, \rho_i)_j^2 + \left(\frac{-Ax(V_i, \rho_i)_j}{A(V_i, \rho_i)_j^2}\right)^2 \cdot \delta Ay(V_i, \rho_i)_j^2} \quad (20)$$

Грешката на оценката на фазовия ъгъл на амплитудата, като функция на грешките на линейния ( $\delta V$ ) и кръговия ( $\delta \rho$ ) измервателен преобразувател и отчетените стойности  $V_i$  на ъгъл  $\rho_i$ , се получава (в радиани):

$$\delta \theta(V_i, \rho_i) = \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{\delta V^2}{A(V_i, \rho_i)^2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \delta \rho^2 \cdot \frac{\left(\sum_{j=0}^{n-1} V_i \cdot \cos(\rho_i \cdot j)\right)^2 \cdot (Ay(V_i, \rho_i)_j)^2 + \left(\sum_{j=0}^{n-1} V_i \cdot \sin(\rho_i \cdot j)\right)^2 \cdot (Ax(V_i, \rho_i)_j)^2}{(A(V_i, \rho_i)_j)^4}} \quad (21)$$

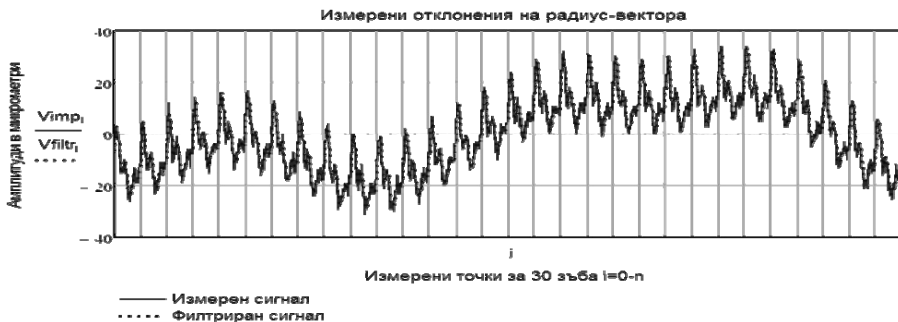
Като съответно и грешката на оценката се получава по зависимост 9, 3 и 4:

$$\begin{aligned} \delta Ax_1 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\delta Ax_{12_1}^2 + \delta Ax_{13_1}^2 + \delta Ax_{23_1}^2} & \delta Ay_1 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\delta Ay_{12_1}^2 + \delta Ay_{13_1}^2 + \delta Ay_{23_1}^2} \\ \delta Ax_2 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\delta Ax_{12_1}^2 + \delta Ax_{23_1}^2 + \delta Ax_{13_1}^2} & \delta Ay_2 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\delta Ay_{12_1}^2 + \delta Ay_{23_1}^2 + \delta Ay_{13_1}^2} \\ \delta Ax_3 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\delta Ax_{23_1}^2 + \delta Ax_{13_1}^2 + \delta Ax_{12_1}^2} & \delta Ay_3 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\delta Ay_{23_1}^2 + \delta Ay_{13_1}^2 + \delta Ay_{12_1}^2} \end{aligned} \quad (22)$$

Замествайки функциите 14 и 15 в горите зависимости 22 и 23, се определят грешките на оценката на реалната и имагинерната част на векторите еквивалентни на радиалното биене на всяко зъбно колело.

На база на представената методика за определянето на грешката на оценката на амплитудата и фазовия ъгъл на различни честоти е разработена програмен продукт в среда на MathCAD на фирмата Parametric Technology Corporation.

Входяща променлива (фиг. 2) е радиус-вектор  $V_i$  с  $n=2500$  стойности, получен при отчитане от линеен фоторастеров преобразувател на радиалните премествания на подвижна каретка с установено на нея зъбно колело, което се отъркалва един оборот, при безхлабинно зацепване, със зъбно колело със същите геометрични показатели. Текущият ъгъл на завъртане на двойката зъбни колела, на който се отчита промяната на радиусвектора е  $\rho_i = \frac{\pi}{180} \cdot i$  (rad) Грешката на отчитане на линейния фоторастеров преобразувател е  $\delta A = 1(\mu m)$  и е определена на базата на 100 повторни измервания [3], а грешката на отчитане на кръговия фоторастеров преобразувател е  $\delta \rho = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{2500}$  (rad) и е взета априори от паспорта на



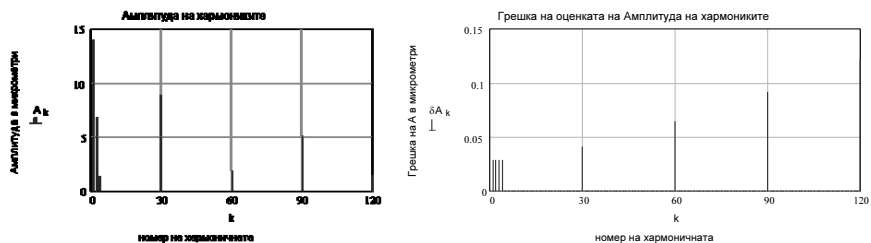
производителя.

За да бъдат намалени грешките при изчисленията, входящия сигнал се „центрира“, като се премахва постоянната съставляваща (средно аритметичната стойност на радиус-вектора) –  $V_i = V_i - \bar{V}$ . По зависимости 2 и 3 се получават реалната и имагинерната съставляваща на амплитудите, а по зависимости 4 и 5 – амплитудите и съответните им фазови ъгли за всяка честота – от 1 до  $n/2$ . На базата на многобройни измервания и по априорни данни, се доказва, че входящият сигнал има някои характерни честоти (хармоници), чиито амплитуди зависят от геометричните и точностните показатели на зъбното колело. Това са: първи хармоник, зависещ от радиалното биене на зъбното колело, втори хармоник, зависещ от челното биене на зъбното колело и от грешката при установяване в дорника, частично проявление на хармоници от трети до шести, зависещи от технологични грешки и грешки в макрогеометрията на заготовката. Другия характерен хармоник е кратен на броя зъби  $z$  на зъбното колело, и има съответни субхармоници, кратни на  $2z$ ,  $3z$  и  $4z$ , които зависят главно от грешките на диференциалните показатели на зъбните колела и коефициента на припокриване на двойката зъбни колела.

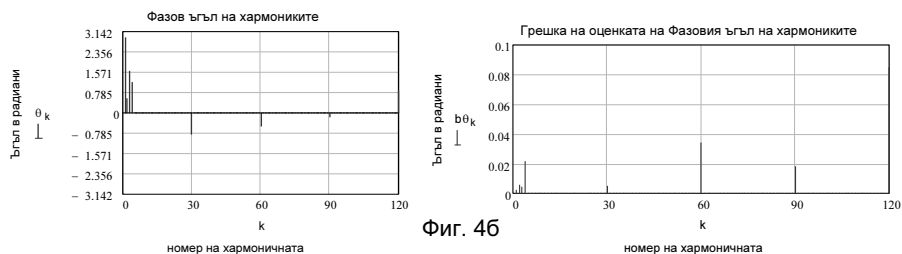


еволюентните повърхнини или чепаци, входящият сигнал се филтрира, като се построява по зависимост 1, само по амплитудите, чиято стойност е над  $1 \mu\text{m}$  за модули над  $3 \text{mm}$  и  $0,5 \mu\text{m}$  – под  $m=3\text{mm}$ . Разбира се, граничната стойност на този филтър, би трябвало да бъде обоснована, чрез провеждане на допълнителен експеримент. В случая, тя е подбрана така, че средноквадратичното отклонение на разликата между входящия и филтрирания сигнал да не превишава  $2 \mu\text{m}$ , а средноаритметичната стойност да клони към нула – т.е. разликата да има характера на шум, дължащ се на действието на случайни фактори (фиг.3).

За да бъдат премахнати някои груби отскоци на подвижната каретка, дължащи се на фактори, които не са характерни за получаващия се периодичен сигнал, като попадане на стружки в междузъбието, местни побитости по

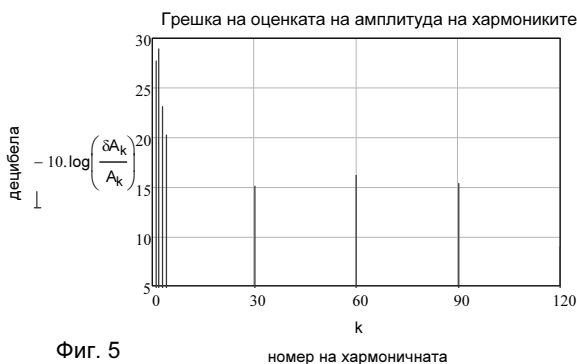


Фиг. 4а



### Изводи

1. Използването на Хармоничния (Фурие) анализ за отделяне на полезната част на входния сигнал от непользната, макар и сложно и трудоемко, помага с достатъчна точност да се опише в амплитудно-честотната област сложният периодичен сигнал на сумарното действие на промяната на ИМР на зацепените беззлабинно зъбни колела, като се отделят, чрез решаване на система от векторни уравнения, амплитудите и фазовите ъгли на всяко контролирано зъбно колело.



2. Изследването на зависимости 17 и 21 показва, че входящите параметри на математическия алгоритъм, като брой измервани точки (ъглова дискретизация), грешка на измерване на промяната на радиусвектора и на ъгловата дискретизация са избрани удачно, тъй като при направеният анализ на грешката на оценката на амплитудите и фазовите ъгли, отношението между грешката на оценката и

оценката на амплитудата в dB (фиг. 4а и 4б, фиг. 5) е приемливо (под 1% за първи хармоник), което може да се илюстрира с примера: при 20 dB, отношението сигнал-шум е над 100, т.е. при амплитуда 100  $\mu\text{m}$ , грешката не надвишава 1  $\mu\text{m}$ .

3. Чрез използването на Хармоничния анализ за филтриране на сигнала, може да се премахват резки отскоци, нехарактерни за естествената периодичност на входящия сигнал, което спомага в процесът на измерване да се идентифицират местата, където се появяват и могат визуално да се открият причинителите на тия несъответствия.

4. Използването на Хармоничния анализ за получаването на стойностите на амплитудите при характерни честоти спомага, след емпирично разкриване на връзката между големината на амплитудите и стойността на някои комплексни или диференциални показатели на качеството на зъбните колела, да се окачествяват и такива показатели, които досега методът за КДП не можеше .

5. Разработването на гъвкав математичен алгоритъм спомага методът на трите колела за бъде изследван и чрез симулационен експеримент.

### Литература:

- [1] Тайц Б. А. , Точность и контроль зубчатых колес, Машиностроение, М. 1972
- [2] Марков А. Л., Измерение зубчатых колес, Машиностроение, Л. 1977
- [3] Радев Хр., Метрология и измервателна техника, Справочник С. 2008
- [4] Randal R. B., Frequency Analysis , Bruel&Kjaer, 1987

**Данни за автора:**



**Младен Илиев Петров**, машинен инженер – автоматично управление на технологични процеси – 1985 г., главен асистент в катедра „Технология на машиностроенето и металорежещи машини“ при факултет „Машино-технологичен“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“. [www.uni.ruse.bg](http://www.uni.ruse.bg), [mpetrov@ru.acad.bg](mailto:mpetrov@ru.acad.bg)

**Научни интереси:** Метрология и метрологично осигуряване, Управление на качеството, Стандартизация и сертификация.

**Докладът е рецензиран**