

Винтов краен елемент с осем възела

Иво Драганов

Eight-node helical finite element: The deformation and the stiffness matrices of an eight-node finite element are worked out, using the equations of the elasticity theory in helical coordinate system and linear shape functions. The vector of the nodal forces, when applying pressure, is composed. The helical finite element is verified, when it coincides with cylindrical. Numerical examples are solved.

Key words: Helical Body, Helical Finite Element, Finite Element Analysis.

ВЪВЕДЕНИЕ

Коравинните матрици на осем-възлови хексаедърни крайни елементи са известни [1], [4], [8]. Те са изведени в декартова локална координатна система като са използвани уравненията на теория на еластичността, изведени също в декартова координатна система [2].

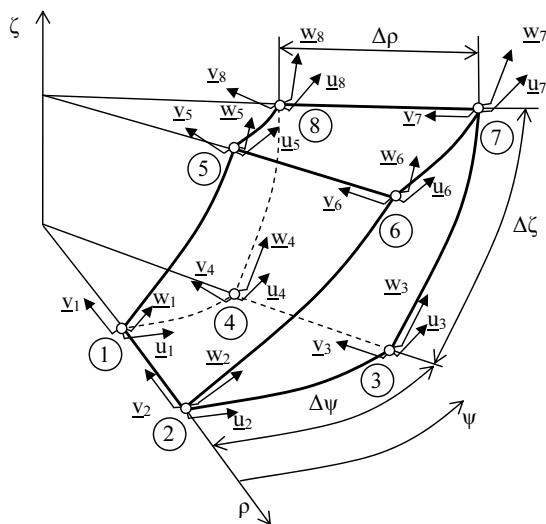
Определянето на напрегнато-деформираното състояние на винтови тела, чрез съществуващите крайни елементи, води до въпроса за точността на решението [3], [6].

Уравненията на еластична среда във винтова координатна система са изведени в [7]. Те са използвани за създаване на осем възлов винтов краен елемент.

1. ГЕОМЕТРИЯ НА КРАЙНИЯ ЕЛЕМЕНТ

Пространственият осем-възлов винтов краен елемент има вида показан на фиг.

1.



Фиг. 1. Пространствен винтов краен елемент с осем възела

Размерите на крайния елемент са показани на фиг. 1, а възлите са с координати, дадени в таблица 1.

Таблица 1. Координати на възлите на тримерен винтов краен елемент

Номер на възела	Координати	Номер на възела	Координати
1	ρ_1, ψ_1, ζ_1	5	ρ_1, ψ_1, ζ_2
2	ρ_2, ψ_1, ζ_1	6	ρ_2, ψ_1, ζ_2
3	ρ_2, ψ_2, ζ_1	7	ρ_2, ψ_2, ζ_2
4	ρ_1, ψ_2, ζ_1	8	ρ_1, ψ_2, ζ_2

2. ИЗВЕЖДАНЕ НА ДЕФОРМАЦИОННАТА И КОРАВИННАТА МАТРИЦА

Функциите на формата са:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i). \tag{1}$$

Деформационната матрица е:

$$[B] = \begin{matrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \vdots \\ \gamma_{31} \end{matrix} \begin{bmatrix} u^*_{1} & v^*_{1} & w^*_{1} & u^*_{2} & \dots & w^*_{8} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \rho} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \rho} & \dots & 0 \\ \rho N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial \psi} & 0 & \rho N_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & -2\alpha \frac{N_1}{\rho} & \frac{\partial N_1}{\partial \rho} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \rho} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

като за производните на преместванията е в сила:

$$\frac{\partial u^*}{\partial \rho} = \frac{\partial N_1}{\partial \rho} u^*_{1} + \frac{\partial N_2}{\partial \rho} u^*_{2} \dots \tag{3}$$

Коравинната матрица се получава от зависимостта:

$$[K_c] = \int_{V_e} [B]^T [C] [B] dV, \tag{4}$$

където [C] е матрица с материалните характеристики.

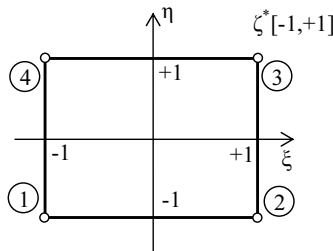
При пространствена задача за обема от интеграла (4) е в сила:

$$dV = dx dy dz = \det[J_1] d\rho d\psi d\zeta, \tag{5}$$

където:

$$\det[J_1] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \rho \cos^2(\psi + \alpha\zeta) + \rho \sin^2(\psi + \alpha\zeta). \tag{6}$$

Въведена е нормирана координатна система – фиг. 2.



Фиг. 2. Нормирана координатна система

Връзката между винтовата координатна система и нормираните координати има вида:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} \rho_1(1-\xi) + \frac{1}{2} \rho_2(1+\xi), \\ \psi &= \frac{1}{2} \psi_1(1-\eta) + \frac{1}{2} \psi_2(1+\eta), \\ \zeta &= \frac{1}{2} \zeta_1(1-\zeta^*) + \frac{1}{2} \zeta_2(1+\zeta^*). \end{aligned} \quad (7)$$

За намирането на производните на функциите на формата спрямо нормираните координати е в сила:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \zeta^*}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \rho} & \frac{\partial \psi}{\partial \rho} & \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \zeta^*} & \frac{\partial \psi}{\partial \zeta^*} & \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \psi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

където матрицата от дясно е матрицата на Якоби. Въведени са означенията:

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \rho_2 - \rho_1, \\ \Delta \psi &= \psi_2 - \psi_1 \text{ и} \\ \Delta \zeta &= \zeta_2 - \zeta_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Заместени са уравнения (7) в (8) и за матрицата на Якоби се получава:

$$[J_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta \rho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta \psi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \Delta \zeta \end{bmatrix}, \quad (10)$$

а детерминантата на матрицата на Якоби е:

$$\det[J_2] = \frac{1}{8} \Delta \rho \Delta \psi \Delta \zeta. \quad (11)$$

Деформационната матрица (2) може да се представи в нормирани координати като се използва обратната на матрицата на Якоби:

$$\begin{aligned} B_{0101} &= \frac{\partial N_1}{\partial \rho} = \frac{2}{\Delta \rho} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4\Delta \rho} (1-\eta)(1-\zeta), \\ B_{0104} &= \frac{\partial N_2}{\partial \rho} = \frac{2}{\Delta \rho} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4\Delta \rho} (1-\eta)(1-\zeta), \\ B_{0107} &= \frac{\partial N_3}{\partial \rho} = \frac{2}{\Delta \rho} \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4\Delta \rho} (1+\eta)(1-\zeta), \\ B_{0110} &= \frac{\partial N_4}{\partial \rho} = \frac{2}{\Delta \rho} \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4\Delta \rho} (1+\eta)(1-\zeta), \\ B_{0113} &= \frac{\partial N_5}{\partial \rho} = \frac{2}{\Delta \rho} \frac{\partial N_5}{\partial \xi} = -\frac{1}{4\Delta \rho} (1-\eta)(1+\zeta), \\ B_{0116} &= \frac{\partial N_6}{\partial \rho} = \frac{2}{\Delta \rho} \frac{\partial N_6}{\partial \xi} = \frac{1}{4\Delta \rho} (1-\eta)(1+\zeta), \\ B_{0119} &= \frac{\partial N_7}{\partial \rho} = \frac{2}{\Delta \rho} \frac{\partial N_7}{\partial \xi} = \frac{1}{4\Delta \rho} (1+\eta)(1+\zeta), \end{aligned} \quad (12)$$

$$B_{0122} = \frac{\partial N_8}{\partial \rho} = \frac{2}{\Delta \rho} \frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -\frac{1}{4\Delta \rho} (1 + \eta)(1 + \zeta).$$

Останалите компоненти от първия ред на деформационната матрица са равни на нула. Аналогично се определят и другите компоненти на коравинната матрица.

Матрицата с материалните константи има вида:

$$[C] = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu B & \nu & 0 & -\alpha\nu & 0 \\ \nu B & (1-\nu)B^2 & \alpha^2 + \nu C & 0 & -(1-\nu)\alpha B & 0 \\ \nu & \alpha^2 + \nu C & 1-\nu & 0 & -(1-\nu)\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5(1-2\nu)B & 0 & -0,5\alpha(1-2\nu) \\ -\alpha\nu & -(1-\nu)\alpha B & -(1-\nu)\alpha & 0 & 0,5\alpha^2 + 0,5(1-2\nu)B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5\alpha(1-2\nu) & 0 & 0,5(1-2\nu) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Степента на функцията, която се получава под интеграла в уравнение (29) е 2. Това определя използването на 8 гаусови точки. Координатите, в които трябва да се определят функциите са $\pm 1/\sqrt{3}$, а съответните теглови коефициенти - 1 [5].

За определяне на коравинната матрица се извършва числено интегриране на уравнение (4) по метода на Гаус. При тримерна област е в сила:

$$[K_e] = \sum_{i=1}^8 W_i W_j W_k [B(\xi\eta\zeta)]^T [C(\xi\eta\zeta)] [B(\xi\eta\zeta)] \det J_1(\xi\eta\zeta) \det J_2(\xi\eta\zeta). \quad (14)$$

Преобразуването на коравинната матрица от винтова в декартова координатна система се извършва по зависимостта:

$$[K^*] = [T_2] [K] [T_1]^{-1}, \quad \text{където:} \quad (15)$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\psi + \alpha\zeta) & -\frac{1}{\rho} \sin(\psi + \alpha\zeta) & 0 \\ \sin(\psi + \alpha\zeta) & \frac{1}{\rho} \cos(\psi + \alpha\zeta) & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos(\psi + \alpha\zeta) & -\rho \sin(\psi + \alpha\zeta) & -\alpha\rho \sin(\psi + \alpha\zeta) \\ \sin(\psi + \alpha\zeta) & \rho \cos(\psi + \alpha\zeta) & \alpha\rho \cos(\psi + \alpha\zeta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

3. ВЕКТОР НА ВЪЗЛОВОТЕ СИЛИ

Формирането на вектора на възловите сили, ако действа само нормален разпределен товар по горната повърхнина, се извършва по формулата [4]:

$$\{r\} = \int_A [N]^T \{p\} dA = \iint_A [N]^T \{p\} \det[J_1] d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \{p\} \det[J_1] \det[J_3] d\xi d\eta. \quad (18)$$

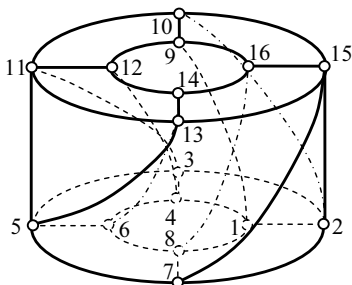
В последната формула:

$$\det[J_3] = \frac{1}{4} \Delta \rho \Delta \psi \quad (19)$$

4. ПРОВЕРКИ И ЧИСЛЕНИ ПРИМЕРИ

При заместване на $\alpha = 0$, в коравинната матрица на тримерния винтов краен елемент, се получава коравинната матрица на цилиндричен краен елемент.

Определени са преместванията на тялото от фиг. 3, при ограничени вертикалните степени на свобода на възли от 1 до 8 и степента на свобода на възел 3 по направление на ос ψ . Тялото е натоварено с повърхнинно разпределен товар, действащ нормално на горната повърхнина. Резултатите съвпадат с известните от съпротивление на материалите



Фиг. 3. Цилиндрично тяло моделирано с осем-възлови крайни елементи

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изведен е осем възлов винтов краен елемент като са използвани линейни функции на формата.

При заместване на параметъра $\alpha = 0$, коравинната матрица на винтовия краен елемент съвпада с коравинната матрица на цилиндричен краен елемент.

Чрез изведения краен елемент е моделирано цилиндрично тяло с тръбно кръгово напречно сечение. Получените резултати за преместванията съвпадат с известните от съпротивление на материалите.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Банков Б., Ю. Павлова. Метод на крайните елементи в строителната механика. УАСГ, София, 1999.

[2] Върбанов Хр. Теория на еластичността. Държавно издателство "Техника", 1965.

[3] Драганов И. Влияние на подема на винтовата линия върху точността на решението при анализ на винтови тела по метода на крайните елементи. Механика на машините 93. Година XIX, книга 2, с. 55-60, 2011.

[4] Стойчев Г. Метод на крайните елементи. Якостен и деформационен анализ. София, 2000.

[5] Abramovitz M., I. Stegun. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, 1972.

[6] Tashev, M. Finite analysis of the stress in the screw's stem. Journal of the Technical University at Plovdiv, "Fundamental Sciences and Applications", Vol. 13 (5), p. 98-103, 2006.

[7] Todorov M., I. Draganov. Equations of elasticity theory in a helical coordinate system. IISC MECHANICS, p. 253-264, 2010.

[8] Zienkiewicz O., R. Taylor. The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. Butterworth-Heinemann 2000.

За контакти:

Ас. инж. Иво Драганов, Катедра "Техническа механика", Русенски университет "Ангел Кънчев", тел.: 082 888 224, e-mail: iiivanov@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран