Обобщено дискретно билинейно време-честотно разпределение

Сашка Иванова

Generalized discrete bilinear time-frequency distribution: *The transition of the bilinear time-frequency distribution from continuous time to the discrete-time case is none straightforward because of aliasing problem. A formulation of a discrete-time discrete-frequency bilinear time-frequency distribution for analysis of non-stationary signals is obtain using an approximation of continuous distribution. Requirements for time and frequency sampling intervals are defined allowing discrete Fourier transform to be used.*
Key words: *Bilinear time-frequency distribution, Ambiguity function, Discrete Fourier transform*

ВЪВЕДЕНИЕ

Билинейните време-честотни разпределения (БВЧР) са интегрални преобразувания, които намират широко приложение за анализ на биомедицински, радарни, аудио сигнали, както и за анализ и синтез на изображения. БВЧР описват изменението на енергията на сигнала съвместно по време и по честота [1], [4] и могат да бъдат дефинирани еквивалентно в четири различни области:

а) време-честотна област или накратко $(t-f)$ област ;

б) времева корелационна област или накратко $(t-\tau)$ област (време-времезакъснение);

в) честотна корелационна област или накратко -$(f-\nu)$ област (честота – доплерово отместване);

г) област на неопределеност или накратко $(\tau-\nu)$ област (времезакъснение-доплерово отместване).

Дефинирането на БВЧР, както и развитието на теорията, свързана с техните полезни свойства и конкретни приложения, обикновено се разглежда за случая на непрекъснати сигнали [3], [4]. В областта на неопределеност БВЧР, означено с $T_x(t,f)$, се представя чрез двумерно преобразувание на Фурие (ПФ) и има вида:

$$T_x(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\tau,\nu)\widetilde{A}(\tau,\nu)e^{-j2\pi f\tau}e^{j2\pi\nu t}d\tau d\nu\,, \qquad (1)$$

където $\widetilde{A}(\tau,\nu)$ е симетричната функция на неопределеност (ФН) на непрекъснатия сигнал $x(t)$, а $\Phi(\tau,\nu)$ е ядро на преобразуванието.

Точното изчисляване на разпределението за непрекъснатия случай е невъзможно, тъй като то е дефинирано като интеграл с безкрайни граници. Достатъчно коректно за практиката решение може да бъде получено чрез цифрова обработка, която изисква дискретен еквивалент на БВЧР, т.е. преобразуване на непрекъснататата функция на две променливи $T(t,f)$ в аналогична дискретна, както във времевата, така и в честотната област $T(n,k)$.

Поради двумерния характер на БВЧР и факта, че спектрите на дискретните сигнали имат периодичен характер, прехода от непрекъснато БВЧР към дискретно е сложен и не винаги коректен. При дискретизацията могат да се нарушават някои от важните свойства на БВЧР, които са задължителни при обработката на сигнали чрез БВЧР [1], [3], [4].

ОБОСНОВКА НА ОБОБЩЕНО ДИСКРЕТНО БИЛИНЕЙНО ВРЕМЕ-ЧЕСТОТНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

Съществуват различни методи за дискретизация на БВЧР, като повечето от тях са дефинирани за дискретизиране на разпределението на Вигнер-Вейл (РВВ), което играе фундаментална роля в теорията на БВЧР и е частен случай на съотношение (1) при $\Phi(\tau,\nu)=1$.

Дискретизацията на БВЧР включва и дискретизация на ядрото на разпределението, което се избира различно за всяко конкретно приложение. РВВ има известни полезни свойства [3], [4], но и недостатъка да съдържа интерференционни съставящи поради билинейния си характер. Използването на ядро, с цел подтискане на интерференцията, усложнява дискретизацията, тъй като ядрата най-често са неограничени и не могат да бъдат дискретизирани коректно. Съществена особеност на дискретизацията на БВЧР е фактът, че тя е двумерна - по време t и по честота f. От друга страна в разпределението участват още две основни променливи – отместването по време τ и по честота ν. Наличието на две времеви и две честотни променливи налага изисквания към интервалите на дискретизация, за да бъде резултантното разпределение адекватно описание на корелацията на сигнала както във времевата, така и в честотната област.

Операторната теория [5], теорията на групите [9], [10], използването на ковариантните свойства на разпределението [6] са различни методи за получаване на дискретното БВЧР. При някои тях се получават изрази с отместване на половин дискрет, което води до използване само на четните дискрети и загуба на част от информацията [7], [8]. При други разпределението е вярно само за нечетен брой на дискретите [6]. Друг недостатък е, че не за всички ядра може да се получи аналитичен израз. В настоящата работа е избран метод на апроксимация на непрекъснатото БВЧР, който е прост и директен от математическа гледна точка. Този метод е използван за получаване на дискретно РВВ в [1]. Апроксимацията на БВЧР се извършва в областта на неопределеност, която е подходяща при анализ на радиолокационни сигнали. Изразът (1) се преобразува, като се използва връзката между симетричната ФН на Сусман $\widetilde{A}_x(\tau,\nu)$ и по-широко използваната в радиолокацията ФН на Удуърд $A_x(\tau,\nu)$:

$$\widetilde{A}_x(\tau,\nu)=e^{j\pi\nu\tau}A(\tau,\nu) \tag{2}$$

След заместване на (2) в (1) се получава следния израз за непрекъснатото билинейно ВЧР:

$$T_x(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\tau,\nu)A(\tau,\nu)e^{j\pi\nu\tau}e^{-j2\pi f\tau}e^{j2\pi\nu t}d\tau d\nu \tag{3}$$

ФН на Удуърд има вида $A_x(\tau,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}z(\mu)z^*(\mu-\tau)e^{-j2\pi\mu\nu}d\mu$, където $z(\mu)$ е аналитичен сигнал, получен чрез преобразуванието на Хилберт от анализирания сигнал $x(\mu)$. Като се приеме, че правото ПФ на непрекъснатия аналитичен сигнал $z(\mu)$ е ограничено, то той може да се апроксимира чрез безкраен брой дискрети по време, взети през интервал T, избран в съответствие с теоремата на Найкуист-Котелников [2]. При направеното допускане обратното преобразуване на Фурие от аналитичния сигнал може да се изрази чрез правото ПФ от дискретизирания сигнал $z(p)$ както следва:

$$z(\mu)\approx\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Z\left(e^{j\gamma}\right)e^{j\gamma\frac{\mu}{T}}d\gamma, \tag{4}$$

където: μ и γ са непрекъснати променливи, които в случая са време и честота, съответно, p е дискретна променлива, а

$$Z\left(e^{j\gamma}\right)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} z(p) e^{-j\gamma p} \tag{5}$$

е правото ПФ на дискретизирания сигнал.

Като се замести с израз (5) в съотношение (4) се получава

$$z(\mu)\approx\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} z(p) e^{-j\gamma p}\right] e^{j\frac{\mu}{T}\gamma} d\mu=\sum_{p=-\infty}^{\infty} z(p)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\gamma\left(\frac{\mu}{T}-p\right)} d\gamma \tag{6}$$

Аналогично за комплексно спрегнатия и отместен сигнал $z^*(\mu-\tau)$ се получава:

$$z^*(\mu-\tau)\approx\sum_{q=-\infty}^{\infty} z^*(q)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\alpha\left(\frac{\mu}{T}-\frac{\tau}{T}-q\right)} d\alpha \quad , \tag{7}$$

където α е непрекъсната променлива (в случая -време), а *q* е цяло число.

След заместване на изрази (6) и (7) в съотношението за ФН се получава:

$$A(\tau,\nu)\approx\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty} z(p)\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\gamma\left(\frac{\mu}{T}-p\right)} d\gamma\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{q=-\infty}^{\infty} z^*(q)\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\alpha\left(\frac{\mu}{T}-\frac{\tau}{T}-q\right)} d\alpha\right] e^{-j2\pi\mu\nu} d\mu \tag{8}$$

Израз (8) е апроксимация на непрекъснатата ФН на Удуърд чрез дискретни отчети от сигнала. Ядрото $\Phi(\tau,\nu)$ се апроксимира по аналогичен начин чрез дискретни стойности $\Phi(m,l)$, взети през интервали на дискретизация съответно - $1/\omega_{\partial 1}$ по времево отместване и $1/\omega_{\partial 2}$ по честотно отместване и добива вида:

$$\Phi(\tau,\nu)\approx\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Phi(m,l)\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\frac{\omega_{\partial 1}}{2}}^{\frac{\omega_{\partial 1}}{2}}\int_{-\frac{\omega_{\partial 2}}{2}}^{\frac{\omega_{\partial 2}}{2}} e^{j\omega_1\left(\tau-\frac{m}{\omega_{\partial 1}}\right)} e^{j\omega_2\left(\nu-\frac{l}{\omega_{\partial 2}}\right)} d\omega_1 d\omega_2 \tag{9}$$

Като се замести с изрази (8) и (9) в съотношение (1) за БВЧР се получава:

$$T_x(t,f)\approx\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Phi(m,l)\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\frac{\omega_{\partial 1}}{2}}^{\frac{\omega_{\partial 1}}{2}}\int_{-\frac{\omega_{\partial 2}}{2}}^{\frac{\omega_{\partial 2}}{2}} e^{j\omega_1\left(\tau-\frac{m}{\omega_{\partial 1}}\right)} e^{j\omega_2\left(\nu-\frac{l}{\omega_{\partial 2}}\right)} d\omega_1 d\omega_2\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[e^{j\pi\nu\tau}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} z(p) z^*(q)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\gamma\left(\frac{\mu}{T}-p\right)} d\gamma\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\alpha\left(\frac{\mu}{T}-\frac{\tau}{T}-q\right)} d\alpha e^{-j2\pi\mu\nu} d\mu\right]\right\}\times$$

$$\times e^{-j2\pi f\tau} e^{j2\pi\nu t} d\tau d\nu .$$

След размяна на реда на интегриране и сумиране и решаване на интегралите в горния израз се получава следната апроксимация на БВЧР :

$$T_x(t,f) \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Phi(m,l)e^{j\frac{\pi}{\omega_{\partial 1}\omega_{\partial 2}}ml}e^{j\frac{2\pi}{\omega_{\partial 2}}lt}e^{-j\frac{2\pi}{\omega_{\partial 1}}fm}\times$$

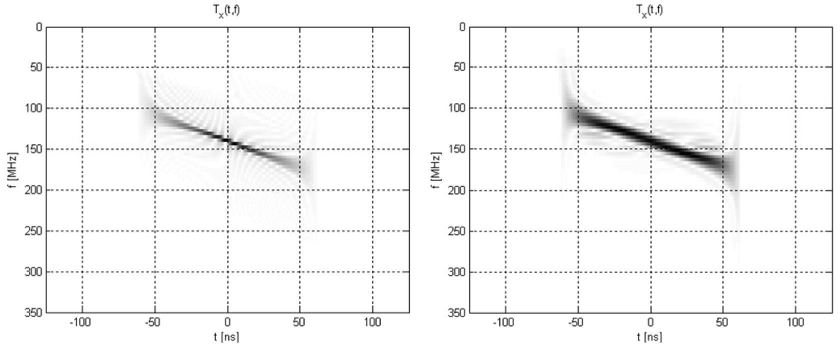
$$\times\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}z(p)z^*(q)e^{-j\frac{2\pi T}{\omega_{\partial 2}}lq}\frac{\sin\left(q+\frac{m}{\omega_{\partial 1}T}-p\right)\pi}{\left(q+\frac{m}{\omega_{\partial 1}T}-p\right)\pi}. \qquad (10)$$

В практиката се използват сигнали с крайна продължителност и следователно след дискретизацията им се получава дискретен сигнал $x(n)$ с *N* на брой ненулеви дискрета. Както е посочено в [1] за намаляване на наслагването е необходимо дискретизацията да се извършва с честота 2 пъти по-голяма от изискваната от теоремата на Найкуист и преди извършване на преобразуванието на Хилберт сигналът $x(n)$ трябва да се допълни с (*N*-1) нулеви дискрета. По този начин дискретният аналитичен сигнал *z* ще бъде с продължителност $M = 2N - 1$ и сумите по индексите *p* и *q* в израз (10) ще бъдат от $-(N-1)$ до $(N-1)$. Ако при подбора на интервалите на дискретизация се осигурят условията $\omega_{\partial 1}T = 1$, $\omega_{\partial 2}/T = M$, то за стойностите на БЧВР в дискретните моменти по времевата ос nT и по честотната ос $k/(TM)$, се получава съотношението:

$$T_x(n,k) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\sum_{l=-(N-1)}^{N-1}\Phi(m,l)e^{j\frac{\pi}{M}lm}\left[\sum_{p=-(N-1)}^{N-1}z(p)z^*(p-m)e^{-j\frac{2\pi}{M}pl}\right]e^{j\frac{2\pi}{M}nl}e^{-j\frac{2\pi}{M}km}. \qquad (11)$$

Така получения израз за дискретно БВЧР представлява двумерно дискретно ПФ, а от друга страна сумата в средните скоби е едномерно дискретно ПФ. Това позволява при изчисляването да се използват алгоритмите за бързо ПФ, което значително повишава изчислителната ефективност.

На Фиг.1 са показани дискретно РВВ (фиг. 1а) и дискретно БВЧР с ядро на Чой-Уилямс (фиг. 1б) на линейно честотно модулиран сигнал с продължителност 125ns и честота, изменяща се линейно от 100MHz до 180MHz.



а) б)

Фиг. 1. Дискретно БВЧР на линейно честотно модулиран сигнал.

От фигурата се вижда, че и при двете разпределения не се забелязват елементи от наслагване поради дискретизацията на разпределението. Както бе отбелязано използването на ядро намалява интерференционните съставящи, но намалява разделителните способности на разпределението.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Направена е апроксимация на непрекъснато БВЧР чрез дискретите по време на непрекъснатия аналитичен сигнал и дискретите по времезакъснение и честотно отместване на непрекъснатото ядро, представено в областта на неопределеност. Дефинирани са условията, при които получената апроксимация може да се използва за намиране на дискретно БВЧР.

Чрез прилагане на полученото дискретно БВЧР за сигнал с линейна честотна модулация е показано, че липсват видими признаци от наслагване в резултата на преминаването от непрекъснато в дискретно честотно-времево разпределение.

Ключов момент при реализацията на предложеното дискретно разпределение е правилният съвместен избор на интервалите на дискретизация на сигнала и използваното ядро. Те трябва да бъдат определяни за всеки конкретен сигнал и всяко използвано ядро.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дворников С.В.,Теоретические основы синтеза билинейных распределений. – Санкт Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2007

[2] Опенхайм А., А. Уилски, Я. Йънг, Сигнали и системи, изд. Техника, София, 1993

[3] Boashash B, Part I: Introduction to the concepts of TFSAP," in Time{Frequency

Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference, B. Boashash, Ed. Oxford, UK: Elsevier, 2003, ch. 1-3, pp. 3-76.

[4] Cohen L., Time-frequency distributions - a review. Proceedings of the IEEE, vol.77 (7): 941-981, July 1989.

[5] McLaughlin, J., J. Droppo, Les Atlas, Class-dependent, discrete time-frequency distribution via operatop theory, Interactive system design laboratory, University of Washington, Seattle

[6] O' Neill J. C. and W. J. Williams, .Shift covariant time-frequency distributions of discrete signals,. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, no. 1, pp. 133.146, Dec. 1999.

[7] O' Toole J., M. Mesbah, and B. Boashash, "A new definition of discrete quadratic time–frequency distributions," in Proc. Sixteenth European Signal Processing Conf. EUSIPCO-08,

[8] O' Toole J., M., Discrete quadratic time-frequency distribution:definition, computation and Newborn electroencephalogram application, PhD thesys, University of Queensland 2009, http://espace.library.uq.edu.au/eserv/UQ:185537/s41122932

_phd_totalthesis.pdf

[9]. Richman M. S., T. W. Parks, and R. G. Shenoy, Discrete-time, discrete-frequency time-frequency analysis," IEEE Trans. Signal Process., vol. 46, no. 6, pp. 1517-1527, Jun. 1998.

[10]. Shenoy R.G. , T.W. Parks, The Weyl correspondence and time-frequency analysis , IEEE Trans. Signal Processing, vol. 42, pp. 318–331, Feb.1994

За контакти:

Гл. ас. инж. Сашка Иванова, Катедра "Електроника, комуникационна и навигационна техника в авиацията", Национален военен университет „В. Левски" факултет "Авиационен", e-mail: sivanova@aff.nvu.bg.

Докладът е рецензиран.