Свойства на детерминантите, описани чрез външно произведение на вектори

Антоанета Михова, Ирина Богомилова

Properties of the determinants described via exterior product of vectors: *The paper presents an application of the exterior ("wedge") product of vectors for computing determinants. A connection between the exterior product and the linear dependence of vectors is described too. The standard properties of determinants are described through this product.*

Key words: *Exterior product, Wedge product, Determinants, Properties of the determinants.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Външното произведение на вектори е полезна алгебрическа структура, въвеждането на която е свързано с изучаване свойствата на лица и обеми, разглеждани в рамките на елементарната Евклидова геометрия.

Понятието "външно произведение" е въведено за първи път от Херман Грасман през 1844 година. За втори път Грасман представя идеите си през 1862 година, но и двата пъти идеите му се посрещат с мълчание от математическото общество. Едва през втората половина на шестдесетте години на 19-век бавно започва преоткриването на идеите на Грасман от съвременниците му, основно чрез приложение на външното произведение в механиката. В наши дни външното произведение намира все по-голямо приложение в линейната алгебра, аналитичната геометрия, проективната и диференциалната геометрии, във физиката. Както казва Джон Браун в [1] "Научният свят може би в 19 век не е бил готов за идеите на Грасман, но сега в 21 век, изглежда започва да разбира техния потенциал".

ВЪНШНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

За определяне на следващите понятия и твърдения използваме [1],[2] и [3]. Разглежданията се извършват над поле K с характеристика 0.

Определение 1: Нека U и W са векторни пространства с базиси съответно $\{u_i,\ i=1,2,...\}$ и $\{w_j,\ j=1,2,...\}$. Тензорно произведение $U\otimes W$ на пространствата U и W се нарича векторно пространство с базис $\{u_i\otimes w_j,\ i,j=1,2,...\}$, за което е изпълнено

$$\left(\sum_i \alpha_i u_i\right)\otimes\left(\sum_j \beta_j w_j\right)=\sum_i\sum_j \alpha_i\beta_j\left(u_i\otimes w_j\right),\ \alpha_i,\beta_j\in K,\quad i,j=1,2,.....$$

Определение 2: Нека V е векторно пространство. Дефинираме ново векторно пространство $V\wedge V$, наречено *външно произведение* (антисиметрично произведение или wedge product) на V по следния начин: Пространството $V\wedge V$ е подпространство на $V\otimes V$, което съдържа всички антисиметрични тензори от вида $v_1\otimes v_2 - v_2\otimes v_1$, където $v_1,v_2\in V$, както и всички линейни комбинации на вектори от този вид.

Означаваме $v_1\otimes v_2 - v_2\otimes v_1$ с $v_1\wedge v_2$. Външното произведение $v_1\wedge v_2$ на векторите $v_1,v_2\in V$ е антисиметрична и билинейна функция, която се нарича бивектор и принадлежи на новото векторно пространство $V\wedge V$.

Твърдение 1 [3]: За всеки два вектора $v_1, v_2 \in V$ и за всяко $\lambda \in K$ са в сила свойствата:

- $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$; (1)
- $(\lambda v_1) \wedge v_2 = \lambda(v_1 \wedge v_2)$; (2)
- $v_1 \wedge (\lambda v_2) = \lambda(v_1 \wedge v_2)$; (3)
- $(v_1 + v_2) \wedge x = v_1 \wedge x + v_2 \wedge x,\ x \in V$; (4)
- $v_1 \wedge v_1 = 0$. (5)

За определяне на външното произведение на три вектора, разглеждаме подпространство на $V \otimes V \otimes V$, което се състои от несиметричните тензори от вида

$$v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 - v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 + v_3 \otimes v_1 \otimes v_2 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_3 \otimes v_1 - v_1 \otimes v_3 \otimes v_2 \qquad (6)$$

и линейните комбинации на такива тензори.

Тези тензори се наричат напълно несиметрични, поради това, че могат да се разглеждат като функции на векторите v_1, v_2 и v_3, които си сменят знака при смяната на местата на всеки два вектора. Означаваме (6) с $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$, по подобен начин на означаването на външното произведение на два вектора.

За да определим външното произведение на k вектора, разглеждаме външното произведение на k - пространства V **.**

Определение 3: Външното произведение на k - пространства V се означава с $\wedge^k V$ и се дефинира като подпространство на напълно несиметричните тензори в тензорното произведение $V \otimes \cdots \otimes V$.

Накратко казано, това е пространство с базис всички елементи от вида $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k$, $v_i \in V,\ i = 1,2,...,k,$ в което свойствата на външното произведение, описани в Твърдение 1 са в сила.

Така например $\quad u \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k = (-1)^k v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge u$. (7)

Ако векторите v_1, v_2 и v_3 са зададени като линейни комбинации на базисните вектори $\{e_j\}$ на пространството V, то можем да намалим $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ до линейна комбинация на външно произведение на базисни вектори като $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, $e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$ и т.н.

Обръщаме внимание, че изразът $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ показва, че външното произведение е асоциативно, т.е. $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = (v_1 \wedge v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3)$.

Пример 1: Нека разгледаме векторите $a = (1, -1, 1)$ и $b = (2, 1, -1)$ от R^3 и да пресметнем външното им произведение $a \wedge b$.

Изразяваме векторите чрез базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$

$a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 + e_2 - e_3$ и използваме, че $e_i \wedge e_i = 0$ и $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$. Тогава $a \wedge b = (e_1 - e_2 + e_3) \wedge (2e_1 + e_2 - e_3) =$

$$= e_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_3 + 2e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3 - 2e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_3 = 3e_1 \wedge e_2 - 3e_1 \wedge e_3.$$

Понятието външното произведение е тясно свързано с понятието линейна зависимост на множество от вектори.

Твърдение 2 [3]: Векторите $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ от пространството V са линейно независими тогава и само тогава, когато $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$, т.е. ако външното произведение на векторите е тензор в $\wedge^k V$, различен от нула.

Това твърдение дава възможност много от свойствата на системи линейно зависими вектори да бъдат приложени за получаване на резултати, свързани с външното произведение.

ПРЕСМЯТАНЕ НА ДЕТЕРМИНАНТИ ЧРЕЗ ВЪНШНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

От линейната алгебра знаем, че

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[i_1,i_2,\dots,i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$, където сумирането се извършва по всички пермутации $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ на числата $(1,2,\dots,n)$ и $[i_1, i_2, \dots, i_n]$ е броят на инверсиите в тази пермутация.

Нека разгледаме векторите $v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$ и $v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$ в двумерното векторно пространство и пресметнем външното им произведение

$$v_1 \wedge v_2 = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2) = a_{11}a_{22}e_1 \wedge e_2 + a_{12}a_{21}e_2 \wedge e_1 =$$
$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1 \wedge e_2.$$

Може да забележим първо, че бивекторът $v_1 \wedge v_2$ е пропорционален на $e_1 \wedge e_2$ и второ, че коефициентът на пропорционалност е равен на стойността на детерминантата $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Нека сега разгледаме векторите $v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3$, $v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3$ и $v_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3$ в тримерното векторно пространство и пресметнем външното им произведение

$$v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) \wedge (a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) =$$
$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$$

Векторът $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ е пропорционален на $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ и коефициентът на пропорционалност е равен на стойността на детерминантата $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Нека $\{e_j,\ j = 1,2,\dots,n\}$ е базис в n-мерно векторно пространство и $\{v_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$ са n вектора. Всеки един от векторите v_i може да се представи като линейна комбинация на базиса $\{e_j,\ j = 1,2,\dots,n\}$, т.е. $v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} e_j, \quad i = 1,2,\dots,n.$ Можем да разглеждаме коефициентите v_{ij} като елементи на квадратна матрица $(v_{ij})_{n\times n}$.

Твърдение 3 [3]:

Детерминантата на матрицата $(v_{ij})_{n\times n}$, получена от координатите на векторите $\{v_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$ в базиса $\{e_j,\ j = 1,2,\dots,n\}$ е числото C, получено като коефициент в равенството $v_1 \wedge \dots \wedge v_n = Ce_1 \wedge \dots \wedge e_n$.

Тогава, прилагайки горното твърдение, за да пресметнем детерминантата $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ трябва да запишем външното произведение на векторите с координати елементите на даден ред, т. е.

$$(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + ... + a_{1n}e_n) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{2n}e_n) \wedge ... \wedge (a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + ... + a_{nn}e_n) =$$

$$= v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n = C\, e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_n . \quad (8)$$

Коефициентът C пред едночлена $e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_n$ е стойността на детерминантата.

Пример 2: Да се пресметне детерминантата $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow (e_1 + 3e_2) \wedge (4e_1 + 8e_2) = 4e_1 \wedge e_1 + 8e_1 \wedge e_2 + 12e_2 \wedge e_1 + 24e_2 \wedge e_2 = -4e_1 \wedge e_2 \Rightarrow \Delta_1 = -4.$$

Пример 3: Да се пресметне детерминантата $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (e_1 + 2e_2 - e_3) \wedge (e_2 + e_3) \wedge (2e_1 + e_2) = \; 5e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \Rightarrow \Delta_2 = 5.$$

СВОЙСТВА НА ДЕТЕРМИНАНТИТЕ

Използвайки свойствата на външното произведение и неговата връзка с линейната зависимост на вектори (Твърдение 1, Твърдение 2) и Твърдение 3, което ни дава възможност да пресмятаме детерминантите чрез външното произведение на векторите с координати елементите на даден ред, можем да стигнем до добре познатите ни свойства на детерминантите по нов начин.

- От $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$ следва: **Свойство 1.** *Детерминантата променя знака си, ако се разменят местата на два реда.*
- От $(\lambda v_1) \wedge v_2 = \lambda (v_1 \wedge v_2)$ и $v_1 \wedge (\lambda v_2) = \lambda (v_1 \wedge v_2)$ следва: **Свойство 2.** *Ако елементите на даден ред са умножени с число, то числото може да се изнесе като множител пред детерминантата.*
- От $v_1 \wedge v_1 = 0$ и Свойство 2 следва: **Свойство 3.** *Детерминанта, която има два еднакви или два пропорционални реда е равна на нула.*
- От $(v_1 + v_2) \wedge x = v_1 \wedge x + v_2 \wedge x$ следва: **Свойство 4.** *Ако всеки елемент на i-тия ред на една детерминанта се представя като сума $a_{ij} = a_{ij}' + a_{ij}''$ за всяко j, то детерминантата е равна на сума от две детерминанти, в която всичките редове освен i-тия са непроменени,*

а в i-тия ред на първата детерминанта са елементите a_{ij}', а във втората a_{ij}''.

- От Свойство 3 и Свойство 4 следва: **Свойство 5.** *Детерминантата не променя стойността си, ако към елементите на даден ред прибавим елементите на друг ред, умножени с произволно число.*
- От свойството на линейно зависимите вектори, че една система от поне два вектора е линейно зависима тогава и само тогава, когато поне един вектор от системата е линейна комбинация на останалите вектори следва: **Свойство 6.** *Ако един ред на детерминантата е линейна комбинация на някои от останалите редове, то тя е нула*.
- От Твърдение 3 следва: **Свойство 7.** *Ако елементите на един ред на детерминантата са нули, то тя е равна на 0.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Външното произведение на вектори намира все повече приложения в различни области на науката. Това се потвърждава и от факта, че някои системи за математически пресмятания, като *Mathematica,* направиха приложения за това умножение. Смятаме, че студентите от специалности Математика и Информатика и Компютърни науки могат да бъдат запознати и с описания по-горе начин за пресмятане на детерминанти. Това може да стане чрез възлагане на самостоятелна работа или чрез изготвяне на реферат при изучаване на дисциплините Алгебра за специалност Компютърни науки и Линейна алгебра или Методика на обучението по математика за специалност Математика и Информатика.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Browne, J. Grassmann Algebra: Exploring applications of extended vector algebra with Mathematica, Melbourne, Australia, http://sites.google.com/site/grassmannalgebra.

[2] Drensky, V. Free Algebras and PI Algebras, Springer, Singapore, 1999.

[3] Winitzki, S. Linear Algebra via Exterior products, Ludwig-Maximilians University, Munich, Germany, 2010.

За контакти:

Гл. ас. д-р Антоанета Михова, Катедра “Математически анализ”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 727, e-mail: amihova@uni-ruse.bg

Ирина Богомилова, e-mail: irka_v_b@abv.bg

Докладът е рецензиран.