

Моделът на Ван Йейл за развитие на геометричното мислене у учениците

Виолета Ванева

The Pierre Van Hiele model of geometric reasoning in students: In this paper are described the Pierre Van Hiele levels of geometric reasoning. He has identified five levels of understanding spatial concepts through which children move sequentially on their way to geometric thinking and four characteristics of these levels of thought. Below are listed activities that would be appropriate for students at each level: visualization, analysis, informal deduction, deduction and rigor and the van Hieles recommended five phases for guiding students from one level to another.

Key words: geometry reasoning; levels; children understanding of geometric shapes

ВЪВЕДЕНИЕ

Трудностите, които се срещат при изучаването на геометрия са били предмет на изследване от редица методици. През 1957 г. двама холандски педагози от университета в Утрехт (Dina van Hiele-Geldof и Pierre van Hiele), анализирайки тези трудности, създават теория, която определя нивата на геометрическо мислене, през които преминават учениците, овладявайки геометричните знания, като се започне от простата фигура до развитието на способностите им за формално геометрическо доказателство. Техният теоретичен модел обяснява защо учениците изпитват трудности при изучаване на геометрията въобще и формалните доказателства в частност.

Моделът се появява в техните докторски дисертации, но след смъртта на Дина Ван Йейл-Гелдорф, Пиер я разяснява, уточнява и развива в теорията си. Работата на ван Йейл още отначало привлича вниманието в Съветския съюз и учебният план за изучаване на геометрия в 1960 година бил преразгледан в съответствие с модела на ван Йейл, но после почти две десетилетия бил пренебрегван. Международното признание се забавило доста и едва през 1976 година се започва систематично да се пише и говори за него. След 1980 година идеите на Пиер ван Йейл стават предмет на много проучвания. Днес неговите идеи оказват влияние върху изучаването на геометрия в учебните планове по целия свят.

Този модел се състои от две части: в първата се описват нивата на мислене, а във втората – стайите на изучаването на геометричните знания. Тези две части позволяват да се опише изменението на характера на мислене, който проявяват учениците при изучаване на геометрия. Нивата на развитие са описания не на това, което децата знаят, а очертават степените на развитие, през които преминава детското мислене и различните разсъждения, които използват за да изучават геометрия. С други думи нивата описват как всеки човек мисли и за какъв тип геометрически идеи всеки мисли, а не това, колко знания има. Това дава на учителите схема за организация на обучението по геометрия, с която да се облекчи развитието на учениците от прехода от конкретното ниво на мислене на следващото: фигури – свойства – доказателство – аксиоматичен метод.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Ван Йейл установява пет нива на разбиране на пространствените концепции (от 0 до 4), през които децата преминават последователно в развитието на геометричното им мислене. През 80-те години на ХХ век американските изследователи правят няколко големи проучвания по тази теория и ги преномерират от 1 до 5 ниво, за да може тяхното ниво 0 да описва деца, които не могат да различават фигурите. Пиер ван Йейл публикува през 1986 година

структурата и вътрешния обзор на своята теория. Тези нива на мислене се характеризират със следните особености:

- *Фиксирана последователност*: нивата са йерархични. Учениците трябва да преминават през всяко по-ранно ниво, за да стигнат всяко следващо. Не могат да прескочат ниво. Много от трудностите, изпитвани от учениците по геометрия се дължат на това, че те я изучават на дедуктивно ниво, преди да са достигнали абстрактното ниво. Изследвания в много страни потвърждават това свойство, с едно изключение. Математически талантиливи ученици могат да прескочат някои нива, може би защото те развиват логическите си разсъждения по друг начин.
- *Независимост от възрастта*. Процесът на развитие от едно ниво на друго зависи не от възрастта, а от преподаването. Същност някои ученици и възрастни остават винаги на първо ниво, както и много възрастни никога не достигат до второ ниво. Но възрастта разбира се е свързана с количеството и вида на натрупания опит.
- *Близост (преход на вътрешните свойства във външни)*: Качествата, съществени за едно ниво, стават външни, несъществени на следващото ниво. Свойствата са там на зрително ниво, но ученикът все още не ги осъзнава. Вътрешните обекти на едно ниво стават обект на изучаване на следващото ниво. Например на първо ниво се възприема само формата на фигурата. Разбира се фигурата се определя от нейните свойства. Но едва на следващото ниво фигурата се проанализира и се откриват и нейните компоненти и свойства.
- *Различаване (развитие на езика)*: всяко ниво има свой собствен език и мрежа от взаимовръзки. Макар и учителя и учениците на различните нива да използват едни и същи думи, тяхната интерпретация се оказва много различна. Например, ако за ученика на първо ниво думата квадрат означава форма, която напомня квадрат, този от второ ниво мисли за квадрата в термините на свойствата му, без да знае необходимите и достатъчни условия за определяне на квадрата и може да мисли, че за доказателство, че фигурата е квадрат, трябва да докаже всички свойства. Учителят, който мисли на по-високо ниво, знае не само свойствата на квадрата, но и свойствата, които трябва да се използват за доказателство, че фигурата е квадрат.
- *Разделение (Разпознаване на несъответствията)*: Учител, който обяснява на едно по-високо ниво на ученик, който е в разбирането си на по-ниско ниво, затруднява осъзнаването му на материала. Това ще рече, че ако учебният материал, съдържанието, речникът на преподавателя се отнасят към по-високо ниво, то учениците няма да бъдат в състояние да следват мисълта му.
- *Постижения: Обяснение ролята на учителя*. Ролята на учителя е в това да мотивира постиженията на учениците, да осигурява управлението на този процес, използвайки правилния и подходящия език за съответното ниво. Именно тази роля е жизнено важна, именно тя прави учителя не «говореша книга», а учител, човек, без когото обучението няма да е ефективно.

Нивата на мислене са:

Ниво 1: зрително (визуализация).

Това ниво започва с идентификация и действия с форми, основани на съждения за техния външен вид и обикновено се възприемат като цяло, без съсредоточяване на вниманието върху отделните им части. За учениците на това ниво наблюдението е първия инструмент за размишления. Те могат да разпознаят фигурата на плоскост и в пространството, да назоват дадена геометрична фигура, но не и да вербализират свойствата на фигурата, въпреки, че могат да са я

определили именно по свойствата ѝ. Обикновено те не дават никакво обяснение, основано на свойства, но могат да свързват нови форми с познати.

Можем да обобщим, че на това ниво:

- Учениците разпознават прототипи на основни геометрични фигури (триъгълник, кръг, квадрат). Те възприемат фигурите цялостно (холистично), без да анализират техните качества. Могат да се затруднят в назоваването на един тъпоъгълен триъгълник, защото е много различен по форма от равнобедрения триъгълник.
- Учениците идентифицират и осмислят фигурите и други геометрични конфигурации, като се основават на формите като зрително цяло повече, отколкото на геометричните им свойства; Например те могат да идентифицират триъгълника като "с форма на покривче"
- Те ще идентифицират две форми като еднакви, защото изглеждат еднакви, а не защото отделят свойствата им.
- Предложенията за указанията, които могат да се използват от учителя на това ниво са: групиране, идентифициране, описване на фигурите; манипулиране с физически модели; наблюдение на различни размери и пространствено разположение на едни и същи фигури, различаване свойствата, които не са еднакви; конструиране, рисуване, моделиране, сглобяване и разделяне на фигури.

Ниво 2: дескриптивно (анализ) На това ниво децата могат да идентифицират, описват и обясняват съставните части и свойства на формите.

Но на това ниво у децата още не са сформирани логически представи, така че учениците не са способни да осмислят важните отношения между свойствата. В този случай, например за равностранныя триъгълник те не могат да разберат, че щом триъгълника има равни страни, то той трябва да има и три равни ъгъла. На това ниво детето трудно разбира, че фигурата може да принадлежи на няколко общи класа и да има няколко имена (например, квадратът е правоъгълник, защото като всеки правоъгълник има 4 страни и 4 прави ъгъла. Обаче могат и да се затруднят да проумеят, че квадратът е също правоъгълник. Могат да мислят, че това са две напълно различни фигури, въпреки че имат много общи свойства. Най-отличителното е, че на това ниво учениците могат да опишат всички свойства на дадената фигура, но не могат да различат кои са *необходими* и кои *достатъчни* за описанието на обекта. Обектът на разсъждения на това ниво са класовете форми, а не отделната форма. Но те вече са готови за първично възприятие на методите на геометрични преобразования.

- Учениците започват да разпознават и се учат да използват подходящи термини за да характеризират формите по техните свойства, но не могат да правят връзка между различните фигури и техните свойства. Нерелевантните отличителни черти, като размер и ориентация стават по-малко важни, тъй като учениците са способни да се съсредоточат върху всички фигури от един клас. На това ниво учениците могат да започнат да говорят за взаимовръзките между фигурите и техните свойства.
- Например, те могат да идентифицират правоъгълника като фигура с четири прави ъгъла и успоредни противоположни страни. Могат да разпознаят квадрата, но спорят че не е правоъгълник.
- Движейки се от просто разпознаване на свойствата, използвайки конкретни или виртуални модели за да наблюдават, измерват, определят и променят свойства; използват модели и технология за фокусиране върху дефинирания проблем, изброяване на свойствата, дискутиране необходимите условия за определяне на фигурата;

До края на началната училищна възраст според сега действащата програма у нас учениците могат да достигнат до това ниво на развитие на геометричното си мислене.

Ниво 3: абстрактно (относително). Това е нивото на *неформалната дедукция*, на което у налице способността за класификация на геометрическите фигури по различни признаци и свойства, построяване на най-прости умозаключения и готовност за усвояване на предложени от учителя доказателства на елементарни геометрични теореми. Учениците разбират отношения вътре и между фигурите, например противоположните страни на успоредника са успоредни, затова противоположните ъгли са равни.

Обект на разсъждения на трето ниво са свойствата на формата и в резултат се осмислят отношенията между свойствата на геометрическите обекти.

- Учениците са способни да формулират абстрактни определения и различия между необходими и достатъчни множества от условия за клас от фигури, осъзнавайки, че някои свойства включват други. Разпознават, че всички квадрати са правоъгълници, но не всички правоъгълници са квадрати и разбират защо.
- Учениците за първи път установяват мрежа от логически свойства и започват да разсъждават дедуктивно, разбират връзките между свойствата и могат да излага прости аргументи относно геометричните фигури (мислейки повече за организирането, а не за доказването на теоремите).
- Предложенията за указанията на учителя включват: решаване на задачи, включително задачи в които свойствата на фигурите са важни компоненти; класификации на базата на свойствата на геометричните фигури.

Ниво 4: формална дедукция и доказателство. Това ниво е за геометрията в горния курс на средното училище, което включва аксиоми, формални определения и постулати, теореми и др. Принципно качествена разлика на това ниво от предишното е в това, че учащият е способен самостоятелно да решава задачи за доказателство, да доказва теореми, да установява взаимоотношения между различните теореми в курса по геометрия и да владее различни методи за доказателство. Учениците са способни да разберат важността на дедукцията и необходимостта от аксиоми, определения и теореми, сред които установяват логически отношения. На това ниво учениците могат да разберат и оценяват необходимостта от по-строга система на причинно-следствени връзки и логика, да работят с абстрактни твърдения и са способни да правят заключения не само на базата на преста интуиция, но и на основата на разсъждения и логика. Обект на мисленето на това ниво са отношенията между геометричните обекти, а резултат от мислене на четвърто ниво – дедуктивни аксиоматични системи за геометрия.

Ниво 5: затвърдяване (усвояване). На това ниво, учениците (но всъщност то е достъпно за студенти и даже докторанти), съсредоточават мисленето си на системата като цяло, без да се акцентира вниманието на детайлите на изводите в дадената система. Тук геометрията се вижда с голяма абстрактност, вън от непосредствената връзка с конкретните и нагледни образи и реални модели. Учениците на това ниво са способни да сравнят различни системи от аксиоми и постулати и са способни да формулират теореми. Това ниво е най-малко развито в работата на ван Йейл и обикновено най-малко се разглежда от неговите изследователи. Самият ван Йейл твърди, че най-много се интересува от първите три нива.

Съобразно особеностите на преминаването през нивата Ван Йейл препоръчва 5 фази за ръководство на учениците от едно ниво до друго по дадена тема:

1. **Информация:** учител и ученици се включват в беседа и дейност с изучаваните обекти и учениците се запознават със съдържанието на предмета на

обучението. Правят се наблюдения, задават се въпроси, представят се специфични термини. Всичко това представя на учениците възможност да започнат работа с новите обекти. Обсъждането помага на преподавателя да разбере интерпретацията на езика на учениците, да разбере тяхното мислене и отчитайки тази информация да направлява действията им към достигане нужното разбиране.

2. **Ръководена ориентация:** учениците знаят обектите, които ще се изучават и ги изследват със средства, подбрани внимателно от учителя като използват различни действия, които трябва да бъдат усвоени (сгъване и огъване на лист хартия, измерване, търсене на симетрия и др.). Всъщност голяма част от материала тук ще се състои от кратки задачи, предназначени да предизвикат определени отговори. Изборът на материала и задачите трябва да е такъв, че да могат и концепциите, и процедурите да станат забележими, за да бъдат възприети и разбрани.

3. **Разяснение.** Учениците вече знаят отношенията и се стараят да ги опишат със свои думи. Учителят разяснява термините, които учениците използват и представя новите термини.

4. **Свободна ориентация.** Учениците решават по-сложни задачи, които могат да се решат по различен начин, като използват знанията си за концепциите и отношенията, които са изучили и по-рано придобити навици. Учителят трябва да подбере съответстващи и подходящи геометрични проблеми, които могат да се решат по различен начин.

5. **Интеграция.** Тук вече учениците са способни да усвоят и обединят отношенията и новото знание в обобщения. Учителят може да помогне на учениците в синтеза, като прави преглед на това, което са научили. След завършването на този стадий учениците вече достигат ново ниво на мислене по изучаваната тема. Новата област на мислене заменя старата и учениците са готови да повторят стадия на изучаването на следващо ниво.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Повечето учители по геометрия в средното училище мислят на четвърто или пето ниво. Изследванията обаче показват, че по-голямата част от учениците, които започват да изучават геометрия в горния курс, мислят на първо или второ ниво. Моделът на Ван Йейл помага да се проектира преминаващ през всички училищни степени курс по геометрия, започвайки с изучаването на геометрическите форми в началното училище към изучаване свойствата на геометричните фигури в средното училище, после към осмисляне строгостта и доказателствеността в геометричните разсъждения и накрая до аксиоматичен метод за построяване на геометрия в последните класове. В съответствие с разработения модел П. Ван Йейл предлага да се започне обучението по геометрия от големите групи в детската градина чрез запознаването и разпознаването от децата на най-прости геометрични форми и фигури - квадрати, кръгове, триъгълници, пирамиди и др.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боровских, А. В., Е. Рейхани, Н.Х. Розов. Развитие геометрического мышления школьников. www.fpo.msu.ru/open_files/borovskikh/ravz_geom_mish.doc

[2] Crowley M.L. The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought // National Council of Teachers Mathematics, Yearbook Learning and Teaching Geometry . К – 12.

[3] Everett S. Spatial Thinking Strategies // Science and Children (2000), 37, (7), 36-39
Mason M. The van Hiele Levels of Geometric Understanding <http://www.mcdougallittell.com/state/tx/corr/levels.pdf>

[4] van de Walle, J.A. Geometric Thinking and Geometric Concepts in Elementary and Middle School mathematics // Teaching Developmentally, 4th ed. Boston: Allyn and Bacon, 2001.

За контакти:

Доц. д-р Виолета Йорданова Ванева, Катедра „Педагогика, психология и история“, Русенски университет „Ангел Кънчев“, сл. тел. 082 841609/227, 208, e-mail: vilivaneva@abv.bg

Докладът е рецензиран.