Свободни трептения, собствени честоти и форми в 3D пространството на механичен модул с цилиндрична и сферична става

Валентин Славов

Free vibrations, natural frequencies and natural forms in 3D space of a mechanical module with cylindrical and spherical joint: *In the work is done mechanic-mathematic matrix modeling in 3D space of the free vibrations of a mechanical module with cylindrical and spherical joint. The differential equations of the free vibrations are worked out when the mass, elastic and geometric properties are given. The natural frequencies and the natural forms in small vibrations are determined.*

Key words: *dynamics, free vibrations, matrix modeling*

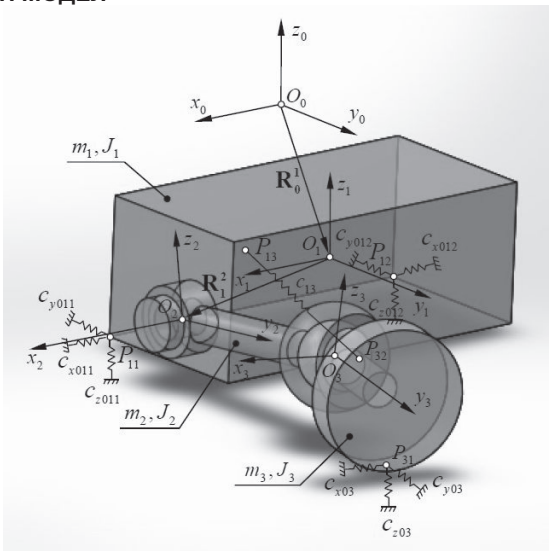
ВЪВЕДЕНИЕ

В съвременната техника много от машините и съоръженията представляват сложни механични системи. Механо-математичното моделиране на тези механични системи трябва да се извършва с модерни компютъризирани методи. Матричната механика [1,2,3,4] съвместно със съответен математичен софтуер [8] и компютър се използват за изследване на кинематиката, динамиката и трептенията на многомасови механични системи и за решаване на конкретни инженерни проблеми. Всяка една механична система е уникална и за моделирането се съставя съответен алгоритъм.

В инженерната практика често се срещат механични системи, в които са включени отделни модули. Тези модули са изградени от две и повече тела, свързани с цилиндрични, сферични, призматични, универсални и др. стави помежду си. За всеки един от тези модули се съставя съответен алгоритъм.

Целта на тази работа е да се изследват динамиката и свободните незатихващи трептения на механичен модул с цилиндрична и сферична става. Такъв модул например представлява предното окачване тип „Макферсон" на лек автомобил [5,6].

ДИНАМИЧЕН МОДЕЛ



Фиг.1. Динамичен модел на механичен модул с цилиндрична и сферична става

Динамичният модел на механичен модул с цилиндрична и сферична става е показан на фиг.1. Механичната система се състои от 3 твърди тела, свързани помежду си със съответни връзки и еластични елементи. Връзката между телата 1 и 2 е цилиндрично-опорна, а между телата 2 и 3 е сферична.

Всички тела се характеризират със своите маси m_i и тензори на масовите инерционни моменти $\mathbf{J}^{\mathbf{i}}_{\Theta\Theta}$:

$$\mathbf{J}^{\mathbf{i}}_{\Theta\Theta} = \begin{bmatrix} J^i_{xx} & -J^i_{xy} & -J^i_{xz} \\ -J^i_{yx} & J^i_{yy} & -J^i_{yz} \\ -J^i_{zx} & -J^i_{zy} & J^i_{zz} \end{bmatrix}; \quad i = 1 \div 3. \tag{1}$$

Еластичните елементи между тяло 1 и основата са два, закрепени в точките P_{11} и P_{12}. Те представляват пространствени еластични елементи и имат линеаризирани коефициенти на еластичност $c_{x011}, c_{y011}, c_{z011}$ и $c_{x012}, c_{y012}, c_{z012}$. Еластичният елемент между тяло 3 и основата е от същия тип и има линеаризирани коефициенти на еластичност $c_{x03}, c_{y03}, c_{z03}$. Той е закрепен в точката P_{31}. Еластичният елемент между тяло 1 и тяло 3 е закрепен съответно в точките P_{13} и P_{32}. Той е линеен и има коефициент на еластичност c_{13}.

Еднозначното дефиниране на положението на механичния модул в 3D пространството спрямо избрана абсолютна координатна система $O_0x_0y_0z_0$ се реализира чрез вектора на обобщените координати:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{23} & \Phi_{33} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}_{(10\times1)} \tag{2}$$

КИНЕТИЧНА ЕНЕРГИЯ

Кинетичната енергия на механичната система се определя от израза:

$$T(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}}) = \sum_{i=1}^{3} T_i(\mathrm{q_i},\dot{\mathrm{q}}_i) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathsf{T}}.\mathbf{M}(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}}).\dot{\mathbf{q}} \tag{3}$$

където T_i се определя по формулата:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i.\mathbf{V}^{\mathbf{0}\,\mathsf{T}}_{\mathbf{Ci}}.\mathbf{V}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{Ci}} + \mathbf{\Omega}^{\mathbf{i}\,\mathsf{T}}_{\mathbf{i}}.\mathbf{J}^{\mathbf{i}}_{\Theta\Theta}.\mathbf{\Omega}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{i}}; \qquad i = 1\ldots3. \tag{4}$$

Въз основа на резултатите от [7] и формулите (3) и (4), са получени резултати за кинетичната енергия на всяко от телата и пълната кинетична енергия на механичната система.

ПОТЕНЦИАЛНА ЕНЕРГИЯ

Потенциалната енергия се изчислява по формулата:

$$\Pi = \Pi_K + \Pi_G \tag{5}$$

където

Π_K - потенциална енергия от деформацията на еластичните елементи,

$$\Pi_K = \sum_{K=1}^{n} \Pi_{Kn} = \frac{1}{2}.\mathbf{c}_{\mathbf{011}}{}^{\mathsf{T}}.(\delta\,\mathbf{r}_{\mathbf{P11}})^2 + \frac{1}{2}.\mathbf{c}_{\mathbf{012}}{}^{\mathsf{T}}.(\delta\,\mathbf{r}_{\mathbf{P12}})^2 + \int \frac{1}{2}.c_{13}.(\delta l)^2 + \frac{1}{2}.\mathbf{c}_{\mathbf{03}}{}^{\mathsf{T}}.(\delta\,\mathbf{r}_{\mathbf{P31}})^2 \tag{6}$$

където

$\mathbf{c_k} = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ - коефициенти на еластичност;

$\delta \mathbf{r_k}$ - деформация на съответния еластичен елемент,

$\delta \mathbf{r_{P1i}} = \mathbf{R_1^0} + \mathbf{U_1^0}.\mathbf{r_{P1i}} - \mathbf{r_{P1i}} \qquad i = 1,2$

$\delta \mathbf{r_{P31}} = \mathbf{R_1^0} + \mathbf{U_1^0}.\mathbf{R_2^1} + \mathbf{U_2^1}.\mathbf{R_3^2} + \mathbf{U_3^2}.\mathbf{r_{P31}} - \mathbf{r_{P31}} - \mathbf{r_{32}} - \mathbf{r_{21}}$

$\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ - вектор на положението на центъра на локалната координатна система, проектиран в отправната координатна система;

$\mathbf{U_1^0}$ - матрица на преход от локалната координатна система на тяло 1 към отправната координатна система при малки ротации на тялото;

$$\mathbf{U_1^0} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{r_k}$ - вектор на положението на съответния еластичен елемент в локалната координатна система;

$$\mathbf{r_k} = \begin{bmatrix} l_{kx} \\ l_{ky} \\ l_{kz} \end{bmatrix};$$

$\mathbf{r_{32}}, \mathbf{r_{21}}$ - вектори на положението съответно на координатното начало на координатната система $O_3x_3y_3z_3$ в координатната система $O_2x_2y_2z_2$ и на координатното начало на координатната система $O_2x_2y_2z_2$ в координатната система $O_1x_1y_1z_1$;

δl - виртуална деформация на еластичния елемент;

$$\delta l = \frac{1}{l}\mathbf{R_{P13}^{P32\,T}}.\delta \mathbf{R_{P13}^{P32}} = \frac{\mathbf{R_{P13}^{P32\,T}}}{l}.\left(\delta \mathbf{R_1^0} - \tilde{\mathbf{r}}_{\mathbf{P13}}^{\mathbf{0}}.\mathbf{U_1^{\Omega 0}}.\delta \mathbf{\Theta}_1 - \delta \mathbf{R_3^0} + \tilde{\mathbf{r}}_{\mathbf{P32}}^{\mathbf{0}}.\mathbf{U_3^{\Omega 0}}.\delta \mathbf{\Theta}_3\right);$$

l - текуща дължина на еластичния елемент;

$l = \left|\mathbf{R_{P13}^{P32}}\right| = \sqrt{\mathbf{R_{P13}^{P32\,T}}.\mathbf{R_{P13}^{P32}}}$;

$\mathbf{R_{P13}^{P32}} = \mathbf{R_1^0} + \mathbf{U_1^0}.\mathbf{r_{P31}} - \left(\mathbf{R_1^0} + \mathbf{U_1^0}.\mathbf{R_2^1} + \mathbf{U_2^1}.\mathbf{R_3^2} + \mathbf{U_3^2}.\mathbf{r_{P32}}\right);$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\mathbf{Pi}}^{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & -l_{Piz}^0 & l_{Piy}^0 \\ l_{Piz}^0 & 0 & -l_{Pix}^0 \\ -l_{Piy}^0 & l_{Pix}^0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U_i^{\Omega 0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin\Phi_2 \\ 0 & \cos\Phi_1 & -\sin\Phi_1.\cos\Phi_2 \\ 0 & \sin\Phi_1 & \cos\Phi_1.\cos\Phi_2 \end{bmatrix}$$

Π_G - потенциална енергия от теглата на телата,

$$\Pi_G = \sum_{i=1}^{3}\Pi_i = \sum_{i=1}^{3}\left(-m_i.\mathbf{g}^{\mathrm{T}}.\mathbf{R_{Ci}^0}\right) \tag{7}$$

$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ - вектор, който дефинира гравитационното ускорение в отправната координатна система.

$\mathbf{R_{Ci}^0}$ - вектор на положението на масовия център.

Въз основа на формули (5), (6) и (7) и резултатите от [7], са получени резултати за сумарната потенциална енергия от еластичните сили и теглата на телата.

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ НА СВОБОДНИТЕ НЕЗАТИХВАЩИ ТРЕПТЕНИЯ

Като се вземат предвид кинетичната енергия, потенциалната енергия от деформацията на еластичните елементи и от теглата на телата и се заместят в диференциалните уравнения на Лагранж от II род, при малки трептения се получава система линейни диференциални уравнения, която описва свободните незатихващи пространствени трептения на механичната система:

$$\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}.\mathbf{q} = 0 \tag{8}$$

където
M е матрица на масово-инерционните свойства на цялата система, а **C** матрица на еластичните свойства на цялата система;

Системата свързани линейни диференциални уравнения се получава при малки трептения.

РЕШЕНИЕ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ УРАВНЕНИЯ

Решенията на диференциалните уравнения (8) съответстват на хармонични трептения с честота ω и начална фаза φ и имат вида

$$q(t) = \mathbf{V}.\sin(\omega.t + \varphi) \tag{9}$$

В решения от този тип честотата ω и векторът **V** удовлетворяват матричното уравнение

$$\left|\mathbf{C} - \omega^2.\mathbf{M}\right|.\mathbf{V} = 0\,, \tag{10}$$

което е еквивалентно на система от 10 линейни хомогенни алгебрични уравнения относно компонентите на вектора $\mathbf{V}$. Условието за съществуване на ненулеви решения на хомогенната система (10) води до характеристичното уравнение

$$\det\left(\mathbf{C} - \omega^2.\mathbf{M}\right) = 0 \tag{11}$$

Определянето на собствените честоти и собствените форми се реализира при решаване на алгебричната задача за определяне на собствените стойности и собствените вектори на уравнения (10).

Собствените стойности дефинират матрицата на собствените честоти, която има вида:

$$\boldsymbol{\omega} = diag\left[\omega_{r,r}\right] \qquad r = 1,2,\ldots 10 \tag{12}$$

$$f_r = \frac{\omega_{r,r}}{2\pi} \quad Hz \tag{13}$$

Собствените вектори дефинират собствените форми на еластично окачените твърди тела и формират модалната матрица, която има вида

$$\mathbf{V} = \left[\mathbf{v}_{\mathbf{r,j}}\right]_{10\times 10} \tag{14}$$

където

$\mathbf{v_r} = \begin{bmatrix} v_{r1} & v_{r2} & v_{r3} & v_{r4} & v_{r5} & v_{r6} & v_{r7} & v_{r8} & v_{r9} & v_{r10} \end{bmatrix}$

е векторът на собствените форми по обобщените координати за $r^{-та}$ собствена честота.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Създаден е динамичен модел на модул с цилиндрична и сферична става като механична система от 3 тела с 10 степени на свобода, при което са отчетени инерционните и геометричните характеристики на отделните тела и еластичните свойства на връзките.

Дефинирана е кинетичната енергия на механичната система. Определена е потенциалната енергия от деформацията на връзките и от теглата на телата. Съставена е система от диференциални уравнения и са дадени аналитични решения на свободните незатихващи пространствени трептения на механичната система.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ангелов И. Матрична механика. Динамика. София, Авангард Прима, 2011.

[2] Ангелов, И. Матрична теория на вибрациите в техниката. София, Авангард Прима, 2012.

[3] Ангелов, И. Матрично моделиране в 3D пространството на кинематиката, динамиката и трептенията на механични модули и многомасови системи. Дисертация за присъждане на научна степен „доктор на техническите науки“. София, Технически Университет, 2001.

[4] Ангелов, И., Славов, В. Сборник задачи Матрична механика. Динамика и трептения. София, Авангард Прима, 2010.

[5] Ангелов И., Бачев В., Ахчийски В. Матрична кинематика на лек автомобил в тримерното пространство. Българско списание за инженерно проектиране, брой Х, месец 2012г.

[6] Ангелов И., Бачев В., Николов В. Механо-математично матрично моделиране на пространствените свободни незатихващи трептения на лек автомобил. Българско списание за инженерно проектиране, брой Х, месец 2012г.

[7] Славов В. Кинематика в 3D пространството на механичен модул с цилиндрична и сферична става. Българско списание за инженерно проектиране, брой Х, месец 2012г.

[8] Wolfram S. Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer. Reading, Addison - Wesley, 1988.

За контакти:

Доц. д-р инж. Валентин Славов, Катедра “Приложна механика”, ХТМУ - София, тел.: 0897206836, e-mail: valslavov@abv.bg

Докладът е рецензиран