Свободни незатихващи трептения на система махала

Валентин Бачев

Free not subsided oscillations of pendulums: *This article investigates not subsided free oscillations of a mechanical system composed of n number pendulums with n number degrees of freedom connected to internal elastic bonds. A system of differential equations of not subsided oscillations was created. Analytical solutions are obtained for their own frequencies and their own forms and laws of polyharmonic oscillations in the corresponding generalized coordinates.*

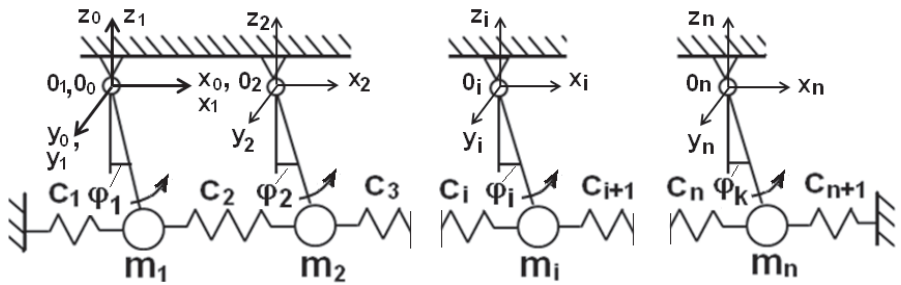
Keywords*: oscillations, mechanical system, the degree of freedom.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Обектът на изследване в настоящата статия е механична система с n степени на свобода, съставена от **n** броя махала, свързани с вътрешни еластични елементи [6, 8]. Предмет на изследване в работата са малки трептения, затова в сила са равенствата $\sin\varphi \approx \varphi; \cos\varphi \approx 1$.

Използвани са матрични методи, с които се изследват успешно кинематиката, динамиката и трептенията на многозвенни механични системи [3, 4, 5, 7].

ИЗЛОЖЕНИЕ



Фиг.1. Система махала с вътрешни еластични връзки

На фиг. 1 е дадена схема на механична система (МС), съставена от n материални точки, всяка от които е с маса m_i (i=1, 2, 3,…,n), окачена е на безтегловна неразтеглива нишка с дължина l и е отклонена от равновесното си положение на ъгъл φ_i. Материалните точки са свързани помежду си с пружини, с коефициенти на линейна еластичност C_i . Механичната система е с **n** степени на свобода – завъртане на всяко махало около ос O_iy_i на локална координатна система $O_ix_iy_iz_i$.

Векторът на обобщените координати на механичната система е равен на:

$$\mathbf{q} = [\ \varphi_{Y1}\ \ \varphi_{Y2}\ \ \varphi_{Y3}\ \ \ldots\ \ \varphi_{Yn}\ ]^{T}_{(nx1)}, \tag{1}$$

Векторът на обобщените скорости на МС е равен на:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\ \dot{\varphi}_{Y1}\ \ \dot{\varphi}_{Y2}\ \ \dot{\varphi}_{Y3}\ \ \ldots\ \ \dot{\varphi}_{Yn}\ ]^{T}_{(nx1)} \tag{2}$$

Кинетичната енергия на механичната система е равна на:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i.(l.\dot{\varphi}_i)^2}{2} \tag{3}$$

Потенциалната енергия на еластичните сили на пружините е равна на:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}.l^2\left[k_1.\varphi_1^2 + k_2.(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \ldots + k_i.(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2 + k_n.\varphi_n^2\right] \tag{4}$$

Потенциалната енергия от теглата на махалата е равна на:

$$\Pi_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i.g.l.\varphi_i^2 \tag{5}$$

Пълната потенциална енергия на механичната система е равна на:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \tag{6}$$

Членовете на матрицата на масите се определят от израза:

$$m_{ij} = \frac{\partial T^2}{\partial\dot{\varphi}_i.\partial\dot{\varphi}_j.} \tag{7}$$

Матрицата на масите е равна на:

$$\mathbf{M} = l^2.\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m_n \end{bmatrix}, \tag{8}$$

Членовете на матрицата на еластичните коефициенти се определят от уравнението:

$$k_{ij} = \frac{\partial\Pi^2}{\partial\varphi_i.\partial\varphi_j.} \tag{9}$$

Матрицата на еластичните коефициенти е равна на:

$\mathbf{C} = l^2$.

$$\begin{bmatrix} \left[(k_1 + k_2) + \frac{2.m_1.g}{l}\right] & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & \left[(k_2 + k_3) + \frac{2.m_2.g}{l}\right] & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & \left[(k_3 + k_4) + \frac{2.m_3.g}{l}\right] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left[(k_n + k_{n+1}) + \frac{2.m_n.g}{l}\right] \end{bmatrix} \quad (10)$$

Диференциалните уравнения на свободните незатихващи трептения на махалата в матричен вид се определят по метода на Ангелов, Ил. [1, 2] и са равни на:

$$\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}.\mathbf{q} = 0\,, \quad (11)$$

където M и C са изведени по-горе.

Частните решения на системата диференциални уравнения се търсят във вида:

$$q_i = \nu_i.\sin(\omega_i.t + \varphi)\,, \quad (12)$$

След диференциране на (12) и заместване в (11) се получава системата линейни алгебрични уравнения:

$$\left|\mathbf{C} - \omega^2.\mathbf{M}\right|.\mathbf{V} = 0\,, \quad (13)$$

Собствените честоти се определят:

$$\det\left|\mathbf{C} - \omega^2.\mathbf{M}\right| = 0 \quad (14)$$

Положителните корени на характеристичното уравнение дефинират собствените честоти на механичната система.

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{diag}[\omega_i], \quad i = 1,2,...,n \quad (15)$$

На всяка собствена честота съответства вектор $\mathbf{V_r}$ на собствената форма, който дефинира съотношението между обобщените координати при трептене с честота ω_r. От (13) се извеждат компонентите на векторите, които дефинират матрицата на собствените форми във вида:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_i], \quad i = 1,2,3...,n \quad (16)$$

,

където

$$\mathbf{V}_i = \left[v_{1,i} \;\; v_{2,i} \cdots v_{i,i} \cdots v_{n,i}\right]^T$$

Законът за полихармонично трептене на всяко от махалата е от вида:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \nu_{11}.\sin(\omega t) + \nu_{12}.\sin(\omega t) + \cdots + \nu_{1n}.\sin(\omega t) \\
\varphi_2 &= \nu_{21}.\sin(\omega t) + \nu_{22}.\sin(\omega t) + \cdots + \nu_{2n}.\sin(\omega t) \\
&\vdots \\
\varphi_i &= \nu_{i1}.\sin(\omega t) + \nu_{i2}.\sin(\omega t) + \cdots + \nu_{in}.\sin(\omega t) \\
&\vdots \\
\varphi_n &= \nu_{n1}.\sin(\omega t) + \nu_{n2}.\sin(\omega t) + \cdots + \nu_{nn}.\sin(\omega t)
\end{aligned} \qquad (17)$$

ИЗВОДИ

Съставена е матрична система диференциални уравнения за **n** броя математични махала с еднакви дължини, свързани с вътрешни еластични елементи. Получени са аналитични решения за собствените честоти и за собствените форми, и законите за полихармоничните трептения на МС по съответните обобщени координати.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ангелов, И. Матрична теория на вибрациите в техниката. Авангард Прима, 2012.

[2] Ангелов, И., Славов, В. Сборник задачи Матрична механика. Динамика и трептения. София, Авангард Прима, 2008.

[3] Ангелов, Ил., В. Славов, Ст. Читаков, Д. Кожухаров. Свободни пространствени нелинейни трептения на съчленено транспортно средство с едноосно ремарке. ТУ-Варна, списание ”Механика на машините” № 63, 2005, стр. 17-20.

[4] Ангелов Ил., В. Бачев, В. Николов., Механо-математично матрично моделиране на пространствените свободни незатихващи трептения на лек автомобил, Българско списание за инженерно проектиране, брой №12, 2012, стр. 23-28.

[5] Бачев В., В. Николов , Ил. Ангелов, Свободни незатихващи трептения в пространството на силов агрегат с ДВГ, монтирани върху стенд., Механика на машините, година XX, книга 4, 2012, стр. 33-36.

[6] Гладков Н., А. Морозов, Исследование колебательной системы с двумя степенями свободы., Под редакцией М.И. Киселева, МГТУ, 1990 г.

[7] Slavov V.R., I.V.Angelov. Freie räumliche nichtlineare Schwingungen eines Verkehrsmittels mit zwei Achsen. ТУ-Варна, списание ”Механика на машините”, № 66, 2006, стр. 45-48.

[8] Shabana A.A. Vibration of Discrete and Continuous Systems / Edition 2, December 1996, Springer-Verlag New York, LLC, 2012.

За контакти:

Гл. ас. инж. Валентин Бачев, Катедра „Машиностроене и уредостроене” Технически университет - София, филиал Пловдив, тел.: (+359) 895-587 381, e-mail: abc4@abv.bg

Докладът е рецензиран