Правоъгълен хибриден трефцов елемент за изследване на пукнатини от смесен тип

Велина Боздуганова

Rectangular hybrid Trefftz element for mixed mode crack. *Rectangular hybrid Trefftz finite elements for mixed mode cracks are investigated. The first nine Williams coefficients are evaluated for different number of nodes and generalized parameters. The variation of the coefficients determining the K_I, K_{II} and T-stress is studied for different side length ratios and relative crack lengths.*

Key words*: hybrid Trefftz crack finite element, Williams functions, mixed mode crack*

ВЪВЕДЕНИЕ

В много случаи инженерните конструкции съдържат пукнатини. Дълготрайността и надеждната работа на такава конструкция зависи от концентрацията на напреженията във върха на пукнатините и от развитието им [2, 8]. При численото изследване със стандартния деформационен вариант на метода на крайните елементи (МКЕ) е необходимо в околността на върха на пукнатината да се използва достатъчно гъста мрежа. Хибридната формулировка в напрежения позволява още в процеса на създаването на крайните елементи да се отчетат особеностите на напрегнатото състояние във върха на пукнатината [9]. Това улеснява намирането на напреженията и директното определяне на критериите за развитие на пукнатината и за евентуалното разрушение на детайла.

В [1] са разработени специални хибридни трефцови крайни елементи с различен брой възли и след комплексна оценка на свойствата им при изследване на пукнатина от I тип е избран КЕ със 17 възела.

В предлаганата разработка са изследвани същите крайни елементи, но за пукнатина от смесен тип (комбиниране на I и II) при равнинно напрегнато и равнинно деформирано състояние и квазистатично натоварване. Оценяването на качествата на тези КЕ е извършено, когато те се използват самостоятелно.

ВАРИАЦИОННА ФОРМУЛИРОВКА И ЕЛЕМЕНТНИ МАТРИЦИ

За извеждане на необходимите елементни матрици е използван функционалът на Хелингер-Райснер [5, 9]

$$\Pi_{HR}(\boldsymbol{u}, \sigma) = \int_{Su} (1/2\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{n}^T \sigma \, dS, \tag{1}$$

където $\sigma=[\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}]$ е вектор на напреженията, $\boldsymbol{u}$, $\bar{\boldsymbol{u}}$ – вектори на преместванията съответно във вътрешността на елемента и по границата му S_u, $\boldsymbol{n}$ – матрица на посочните косинуси на външната за S_u нормала.

Търсените напрежения σ и премествания $\boldsymbol{u}$ във вътрешността на елемента са изразени чрез неизвестен вектор на обобщените параметри β, т.е.

$$\sigma = \boldsymbol{P}\beta,\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{W}\beta. \tag{2}$$

Апроксимиращите функции в матриците $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{W}$ удовлетворяват както условията за равновесие, така и условията за съвместимост на деформациите. Следователно те изпълняват всички диференциални уравнения на равнинната задача на теорията на еластичността, т.е. са функции на Трефц [4, 7, 9]. В настоящата разработка като трефцови функции са използвани известните функции на Уйлямс [10], които са собствени функции на бихармоничното уравнение за безкрайна равнинна област с разрез по отрицателната реална ос, по страните на който няма натоварване.

Преместванията $\bar{\boldsymbol{u}}$ по границата S_u на КЕ са изразени чрез вектора $\boldsymbol{q}$ на възловите премествания

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{q}, \tag{3}$$

където $\boldsymbol{Q}$ е матрица, съдържаща линейни интерполационни функции.

След заместване на $\boldsymbol{u}$ и σ във функционала (1), се получава неговата дискретна форма

$$\Pi_{HR}(\beta, \boldsymbol{q}) = -1/2\beta^{T}\boldsymbol{H}\beta + \beta^{T}\boldsymbol{G}\boldsymbol{q} \tag{4}$$

с матрица на податливост на крайния елемент $\boldsymbol{H}$ и свързваща матрица $\boldsymbol{G}$, като

$$\boldsymbol{H} = \int_{Su} \boldsymbol{W}^{T}\boldsymbol{n}^{T}\boldsymbol{P}\mathrm{d}S, \quad \boldsymbol{G} = \int_{Su} \boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{n}\boldsymbol{Q}\mathrm{d}S. \tag{5}$$

Варирането на (4) по β води до зависимостта

$$\beta = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}. \tag{6}$$

Като се замести β в (4) се получава деформационната енергия, изразена чрез възловите премествания, от която се определя елементната коравинна матрица

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{G}^{T}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G}. \tag{7}$$

При изчисляване на матриците (5) участват само повърхнинни интеграли, т.е. размерността на областта на интегриране намалява с единица.

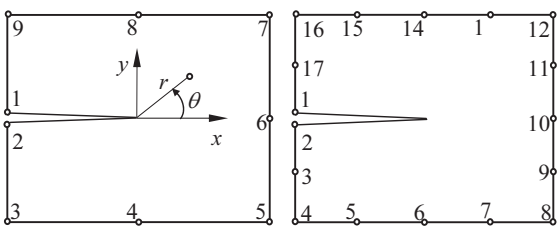
Хибридната формулировка в напрежения изисква да бъде изпълнено необходимото условие за неизроденост на коравинната матрица [5, 9, 12]

$$n_{\beta} \geq n_{q} - n_{r}. \tag{8}$$

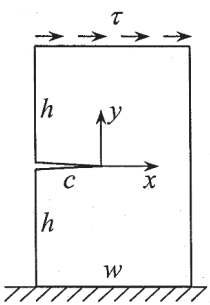
Тук n_{β} е броят на коефициентите в редовете на Уйлямс, които предизвикват напрежения, n_q – броят на степените на свобода на КЕ, n_r – броят на степените на свобода на КЕ като идеално твърдо тяло.

ЧИСЛЕНИ РЕЗУЛТАТИ

В [1] са създадени специални правоъгълни хибридни трефцови крайни елементи с хоризонтална пукнатина със 7, 9, 17 и 25 възела (фиг. 1). Разработените КЕ са изследвани в настоящата разработка при натоварване и закрепване, показани на тестовия пример от [11] за пукнатина от смесен тип (фиг. 2) при: c = 3.5 m, w = 7 m, h = 8 m, $E = 10^5$ Pa, μ = 0.25, τ = 1 Pa, дебелина 1 m.



Фиг. 1. Специални КЕ с 9 и 17 възела за изследване на пукнатини



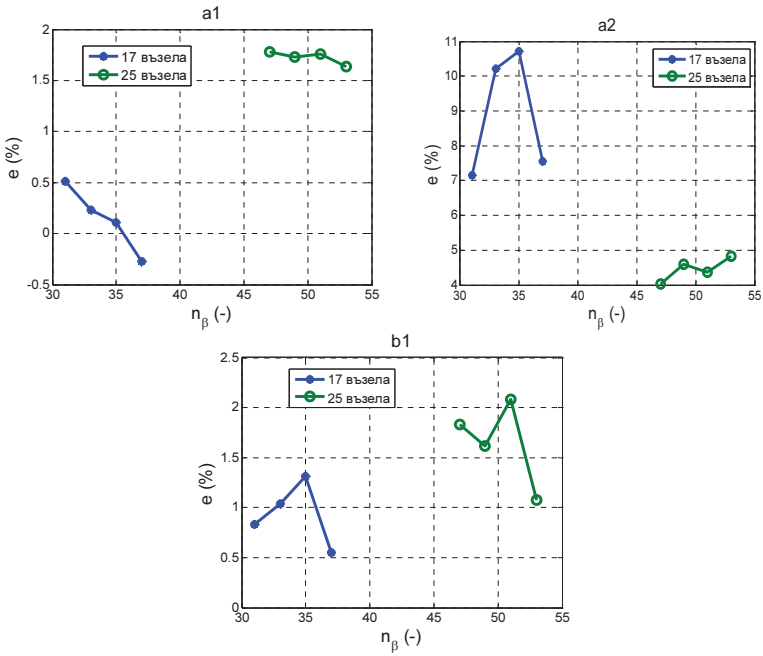
Фиг. 2. Гредостена с едностранна пукнатина при тангенциално натоварване

В [11] са получени първите 9 коефициента a_i (i = 1÷5) и b_j (j = 1÷4) от развитията на Уйлямс за тестовия пример (фиг. 2), като около върха на пукнатината е използван специален КЕ със 17 възела, а останалата част от областта е дискретизирана със 112 четириъгълни хибридни КЕ на Пайън-Сумихара [6]. В табл. 1 стойностите на a_i и b_j са дадени в реда „[11] МКЕ“. В предлаганата разработка са изчислени същите коефициенти, но когато за цялата област е използван само специален КЕ с различен брой възли и n_{β}. Данните за тези случаи са приведени в табл. 1. За сравнение в ред „[11] колокация“ са записани и изчислените по колокационен трефцов метод за цялата област коефициенти [11], които са приети за референтни.

Коефициенти в редовете на Уйлямс за пукнатина от смесен тип Таблица 1

Брой възли	n_β	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_3	b_4	b_5
7	11	15.4308	0.8410	-3.4170	0.6820	-0.3506	-1.6155	0.3560	-0.1418	-0.0097
	13	11.6964	0.8231	-2.1062	0.2112	-0.1493	-0.2784	-0.0162	-0.0115	0.0280
	15	11.7292	0.8183	-2.1136	0.2118	-0.1515	-1.0433	-0.0889	-0.0133	0.0245
	17	11.7530	0.8111	-2.1207	0.2075	-0.1514	-1.2355	-0.0664	-0.0272	0.0197
9	15	11.8638	0.8006	-2.1570	0.2307	-0.1605	-1.5215	-0.1106	-0.0186	0.0197
	17	12.0652	0.7876	-2.2196	0.2366	-0.1692	-1.2489	-0.0377	-0.0264	0.0144
	19	11.2277	0.8089	-1.9591	0.1797	-0.1301	-1.0100	-0.0283	-0.0233	0.0232
	21	11.0414	0.5545	-1.8585	0.1770	-0.1342	-0.9984	-0.0385	-0.0151	0.0255
17	31	13.4001	0.7165	-2.6133	0.3302	-0.2406	-1.7937	-0.2272	-0.0183	0.0410
	33	13.3623	0.7370	-2.6042	0.3175	-0.2358	-1.7974	-0.2337	-0.0166	0.0412
	35	13.3463	0.7404	-2.6023	0.3183	-0.2352	-1.8022	-0.2332	-0.0168	0.0407
	37	13.2951	0.7192	-2.5859	0.3229	-0.2348	-1.7887	-0.2283	-0.0180	0.0414
25	47	13.5689	0.6956	-2.6210	0.2876	-0.2397	-1.8115	-0.2110	-0.0209	0.0355
	49	13.5624	0.6995	-2.6214	0.2880	-0.2397	-1.8076	-0.2083	-0.0217	0.0361
	51	13.5662	0.6979	-2.6206	0.2867	-0.2395	-1.8159	-0.2095	-0.0208	0.0344
	53	13.5504	0.7010	-2.6223	0.2919	-0.2390	-1.7981	-0.2033	-0.0218	0.0356
[11] МКЕ		13.516	0.6716	-2.5703	0.2724	-0.2322	-1.8033	-0.2072	-0.0177	0.0321
[11] колокация		13.3319	0.6687	-2.5653	0.2776	-0.2355	-1.7789	-0.2053	-0.0189	0.0330

От табл. 1 се вижда, че стойностите на коефициентите, получени с КЕ със 7 и 9 възела, не са достатъчно точни. За КЕ със 17 възела коефициентите a_1, a_3, a_5, b_1 и b_4 са по-близки до референтните в сравнение с КЕ с 25 възела.



Фиг. 3. Процентно отклонение на коефициентите a_1, a_2 и b_1 в зависимост от n_β

От табл. 1 следва, че за елементите със 17 и 25 възела стойностите на a_i и b_j са слабо чувствителни по отношение на броя n_β на използваните коефициенти. Поради това елементните матрици са изчислени с минимално допустимия им брой.

В механиката на разрушението най-често се използват коефициентите на интензивност на напреженията и Т-напрежението [3], които се определят от a_1, a_2 и b_1

$$K_I = \sqrt{2\pi}\, a_1,\ K_{II} = \sqrt{2\pi}\, b_1,\ T = 4a_2. \tag{9}$$

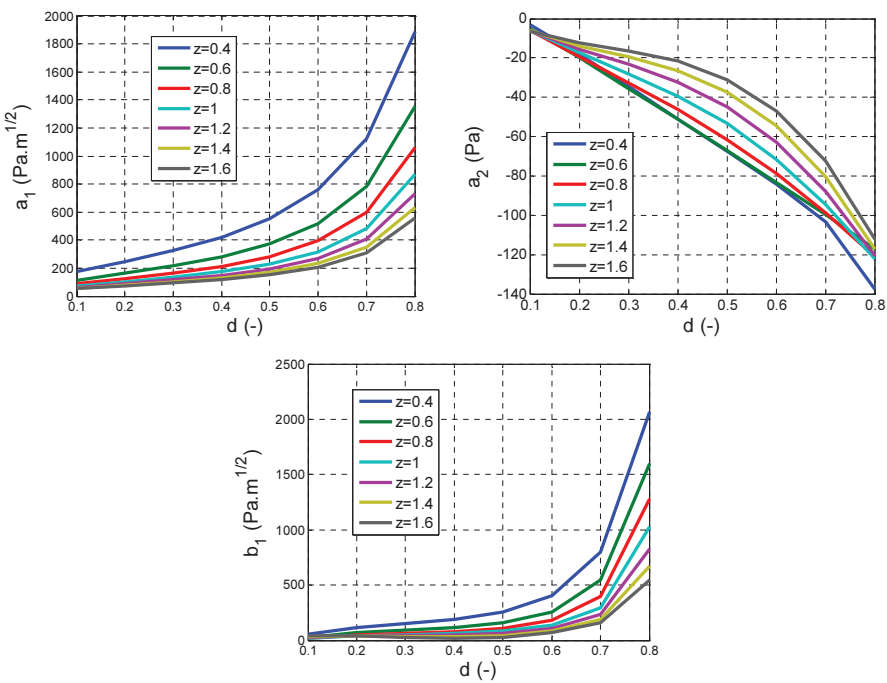
За тези коефициенти са изчислени процентните отклонения спрямо референтните стойности a_{ic}, получени по метода на колокацията

$$e = 100*(\, a_i - a_{ic})/\, a_{ic}. \tag{10}$$

На фиг. 3 са онагледени тези отклонения в зависимост от броя n_β на коефициентите.

По-пълно е изследван 17-възловият елемент с $n_\beta = 31$ като по-икономичен и с по-добри резултати за коефициентите на интензивност на напреженията. За него са получени стойностите за коефициентите на Уйлямс при изменение на отношението $d = c / w$ на дължината на пукнатината към дължината на успоредната й страна при различни съотношения $z = w / 2h$ на двата размера на елемента. Изчисленията са извършени за d = [0.1, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8] при z = [0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6], дебелина на КЕ 1 cm, E = 2.1e11 Pa, μ = 0.3, закрепване и натоварване според фиг. 2 с τ = 100 Pa.

Получените резултати за коефициентите a_1, a_2 и b_1 са показани на фиг. 4. От нея следва, че с увеличаване на относителната дължина на пукнатината големините и на трите коефициента нарастват, т.е. нарастват и големините на коефициентите на интензивност на напреженията и на Т-напрежението. Характерът на изменение на коефициентите при различните отношения на страните на КЕ е един и същ, като при по-ниските елементи големините на коефициентите са по-малки.



Фиг. 4. Изменение на коефициентите a_1, a_2 и b_1 в зависимост от d и z

Тъй като не разполагаме с референтни резултати за коефициентите, получени при различни съотношения на страните z и относителни дължини на пукнатината d, при по-нататъшни изследвания с предлагания 17-възлов КЕ ще бъдат уточнени границите на изменение на d и z, при които се получават достатъчно точни стойности за коефициентите.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценката на качествата на хибридни трефцови КЕ с различен брой възли показа, че 17-възловият елемент, когато не е използван съвместно с обикновени КЕ, дава достатъчно точни резултати за коефициентите на интензивност на напреженията K_I и K_{II} за разгледания тестов пример. Този елемент, вграден в програмна система по МКЕ, може да бъде използван за изследване на пукнатини от смесен тип.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боздуганова В., М. Тодоров. Правоъгълен хибриден трефцов елемент за изследване на пукнатини. Доклади на международна научна конференция на УАСГ – София, Т. 4, 93-98, 2012.

[2] Георгиев М. Пукнатиноустойчивост на металите при статично натоварване. Булвест 2000, София, 2005.

[3] Господинов Г. Въведение в изчислителната механика на разрушението. УАСГ, София, 2003.

[4] Jirousek J., A. P. Zielinski. Survey of Trefftz-Type element formulations. Computers & Structures, Vol. 63, No. 2, 225-242, 1997.

[5] Pian T. H. H. and Wu C. C. A rational approach for choosing stress term of hybrid finite element formulations. International Journal for Numerical Methods in Engineering 26, 2331–2343,1988.

[6] Pian T. H. H. and Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements.International Journal for Numerical Methods in Engineering 20, 1685–1695,1984.

[7] Piltner R. Special finite elements with holes and internal cracks. International journal for numerical methods in engineering, Vol. 21, 1471-1485, 1985.

[8] Sinclair B. Stress singularities in classical elasticity. Appl. Mech. Rev. 57; (4) 251–297; (5) 385–439, 2004.

[9] Tong P., T. H. H. Pian, S. J. Lasry. A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity. Int. J. Numer. Methods Eng. 7, 297–308, 1973.

[10] Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack, ASME J. Appl. Mech. 24, 109–114, 1957.

[11] Xiao Q. Z., B. L. Karihaloo, X. Y. Liu. Direct determination of SIF and higher order terms of mixed mode cracks by a hybrid crack element. International Journal of Fracture 125, 207–225, 2004.

[12] Zienkiewiecz O. C., R. L. Taylor. The finite element method. BH, 2000.

За контакти:

Д-р инж. Велина Боздуганова, Катедра “Техническа механика”, Русенски университет, тел.: 082-888 572, e-mail: velina@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран