Многокритериална оптимизация на параметрични трептения на двумасово махало

Велина Боздуганова

Multi-criteria optimization of double-lumped-mass pendulum parametric vibrations. *A multi-criteria optimization problem for parametric vibration excitation of a two-mass pendulum is formulated and solved. The pendulum is composed of a rigid massless rod and an additional concentrated mass, moving simultaneously along and across the axis of the rod according to given periodic laws. The friction in the joint is assumed viscous. The motion is in still air medium with linear drag force. The developed model could simulate the dynamics of a swing with a standing person pumping the system. Three integral criteria for the optimality of the parametrical vibrations in the transient and stationary swing states are formulated. The ranked Pareto subsets and Salukwadze optimum of the parameters describing the periodical excitations are determined by Parameter Space Investigation with* ***μ****-Selection (PSIMS) method.*

Key words*: double-lumped-mass system, parametric vibrations, swing dynamics, multi-criteria optimization; PSIMS method; ranked Pareto subsets, Salukwadze optimum.*

The dynamic behavior of a mathematical pendulum with rigid massless rod and additional concentrated mass, moving simultaneously along and across the axis of the rod according to given periodic laws, is investigated. The rod is rotating about the axis of a fixed pin-joint resisting with viscous friction moment. The motion is in a stationary air medium with linear drag force. The model developed here could simulate the dynamics of a swing with a person pumping the system.

ВЪВЕДЕНИЕ

Параметрични трептения на механична система възникват при периодично изменение на някой от параметрите на системата. Математичното махало с периодично изменящ се параметър е класически модел за изучаване на параметрично възбудени трептения на механична система [3]. С него може да се обясни феномена „люлеене чрез самозасилване" [9,14]. Периодичното прикякване и изправяне на люлеещия се човек с модулирана честота може да породи и да поддържа люлеенето. Известно е, че при определени съотношения между собствената и възбуждащата честота, устойчивото равновесно положение на махалото с променлива дължина се превръща в неустойчиво [4]. Този начин на самозасилване не е типичен, но съществено опростява математичния модел и затова е изследван най-често [3, 4, 6, 9, 11, 12, 14].

Типичният стил на самозасилване на изправен човек е с едновременно надлъжно и напречно периодично движение на масовия му център. За него в [2] е изследвана двумасова механична система, състояща се от математично махало и подвижна точкова маса, която се премества едновременно по оста на махалото и напречно на него по зададени периодични закони.

Силите, които пораждат резонансни трептения на махалото-люлка са вътрешни за системата и са предварително неизвестни. Те могат да се зададат априори като явни функции на времето и да изпълняват ролята на управляващи програми на движението [13]. Обикновено съпротивителният момент в ставата и аеродинамичната съпротивителна сила, действаща на подвижната маса, се задават като линейни зависимости [6,11,12].

В настоящата разработка е формулирана и решена задача за многокритериален синтез на амплитудите на управляващите периодични функции, които възбуждат параметрични трептения на двумасово махало като симулатор на люлеене чрез самозасилване.

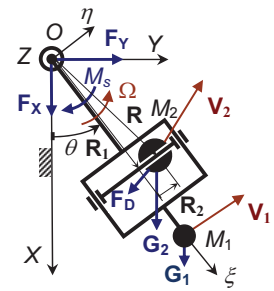
МАТЕМАТИЧЕН МОДЕЛ

Разглеждаме механична система, съставена от математично махало OM_1 и точкова маса M_2, която се движи по предписан начин относно махалото (фиг. 1). То

се състои от твърд безтегловен прът и съсредоточена маса m_1 в материална точка M_1, отстояща на разстояние $L_1 \equiv OM_1$ от неподвижна цилиндрична става O. Към махалото е подвижно свързана материална точка M_2 с маса m_2. Тя се премества едновременно по оста на пръта и напречно на него по зададени периодични закони

$$R_1 = R_0 + H_1\sin(2\Omega_0 T), \quad R_2 = H_2\sin(\Omega_0 T), \tag{1}$$

където: $\Omega_0 = [(m_1L_1+m_2R_0)g/(m_1L_1^2+m_2R_0^2)]^{1/2}$; $L = g/\Omega_0^2$; R_0, L_1, H_1 и H_2 са положителни постоянни величини; T е произволен момент от времето; g – големината на гравитационното ускорение; $R_1\mathbf{i} + R_2\mathbf{j} = \mathbf{R}$, където $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ са единичните вектори на осите $O\xi$ и $O\eta$ на релативната координатна система $O\xi\eta$ (фиг.1).



Фиг. 1. Двумасово махало с двупараметрично възбуждане

Положението на разглежданата механична система относно абсолютната координатна система $OXYZ$ се определя с три координати: θ, R_1 и R_2. Върху нея са приложени следните външни сили: теглата $\mathbf{G_1} = m_1\mathbf{g}$, $\mathbf{G_2} = m_2\mathbf{g}$; динамата ($\mathbf{F}, \mathbf{M_S}$) на реакционните сили на неидеалната цилиндрична става, редуцирани в точка O, и съществената компонента $\mathbf{F_D}$ на аеродинамичната съпротивителна сила при преносното движение на точка M_2 (фиг. 1).

Реакцията $\mathbf{F}$ на цилиндричната става се определя от нейните компоненти $\mathbf{F_X}$, $\mathbf{F_Y}$ по направление на осите OX и OY.

Съпротивителният момент $\mathbf{M_S}$ от вискозно триене в ставата има мярка $M_S = -K_1\Omega$, където K_1 е коефициентът на съпротивление, Ω – мярката на ъгловата скорост на махалото OM_1.

Аеродинамичната съпротивителна сила $\mathbf{F_D}$ се изменя по линеен закон $\mathbf{F_D} = -K_2\mathbf{V_{2,P}}$, където: K_2 е коефициентът на аеродинамично съпротивление; $\mathbf{V_{2,P}} = -R_2\Omega\mathbf{i} + R_1\Omega\mathbf{j}$ – преносната скорост на точка M_2.

Абсолютните скорости на материалните точки M_1 и M_2 са:

$$\mathbf{V_1} = L_1\Omega\mathbf{j}; \quad \mathbf{V_2} = (\mathrm{d}R_1/\mathrm{d}T - R_2\Omega)\mathbf{i} + (\mathrm{d}R_2/\mathrm{d}T + R_1\Omega)\mathbf{j}. \tag{2}$$

Абсолютните ускорения на точките M_1 и M_2 се определят от зависимостите

$$\mathbf{b_1} = -L_1\Omega^2\mathbf{i} + L_1(\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}T)\mathbf{j}, \quad \mathbf{b_2} = (\mathrm{d}^2R_1/\mathrm{d}T^2 - 2\Omega\mathrm{d}R_2/\mathrm{d}T - R_2\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}T - R_1\Omega^2)\mathbf{i} + (\mathrm{d}^2R_2/\mathrm{d}T^2 + 2\Omega\mathrm{d}R_1/\mathrm{d}T + R_1\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}T - R_2\Omega^2)\mathbf{j}. \tag{3}$$

Кинетичната енергия на двумасовото махало е $E_k = (m_1V_1^2 + m_2V_2^2)/2$.

За описване на динамичното състояние на разглежданата механична система ще използваме проекциите върху осите OX и OY на теоремата за изменение на количеството на движение [1]

$$\mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}T = \mathbf{G_1} + \mathbf{G_2} + \mathbf{F} + \mathbf{F_D} \tag{4}$$

и проекцията върху оста OZ на теоремата за изменение на кинетичния момент

$$\mathrm{d}\mathbf{K_O}/\mathrm{d}T = L_1\mathbf{i}\times\mathbf{G_1} + \mathbf{R}\times\mathbf{G_2} + \mathbf{M_S} + \mathbf{R}\times\mathbf{F_D}\,, \tag{5}$$

където: $\mathbf{Q} = m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2$; $\mathbf{K_O} = L_1\mathbf{i}\times m_1\mathbf{V}_1 + (R_1\mathbf{i} + R_2\mathbf{j})\times m_2\mathbf{V}_2$.

Въвеждаме следните безразмерни величини и означения:

$$r_1 = R_1/L;\quad r_2 = R_2/L;\quad r = R/L;\quad r_0 = R_0/L;\quad u_1 = H_1/L;\quad u_2 = H_2/L;$$
$$\lambda = L_1/L;\quad t = T(g/L)^{1/2};\quad r_{11} \equiv \mathrm{d}r_1/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}R_1/\mathrm{d}T)/(Lg)^{1/2};$$
$$r_{21} \equiv \mathrm{d}r_2/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}R_2/\mathrm{d}T)/(Lg)^{1/2};\quad \omega = \Omega(L/g)^{1/2};\quad \omega_0 = \Omega_0(L/g)^{1/2};$$
$$v_1 = V_1/(Lg)^{1/2};\quad v_2 = V_2/(Lg)^{1/2};\quad r_{12} \equiv \mathrm{d}^2r_1/\mathrm{d}t^2 = (\mathrm{d}^2R_1/\mathrm{d}T^2)/g; \tag{6}$$
$$r_{22} \equiv \mathrm{d}^2r_2/\mathrm{d}t^2 = (\mathrm{d}^2R_2/\mathrm{d}T^2)/g;\quad a = |\mathbf{b_2}|/g;\quad \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}T)L/g;$$
$$m = m_1/m_2;\quad m_S = M_S/(m_2gL);\quad f_X = F_X/m_2g;\quad f_Y = F_Y/m_2g;\quad f = F/m_2g;$$
$$f_D = F_D/m_2g;\quad k_1 = K_1/[m_2(L^3g)^{1/2}];\quad k_2 = K_2/[m_2(g/L)^{1/2}];\quad e_k = E_k/m_2gL.$$

С помощта на зависимостите (1)-(6) получаваме следния математичен модел

$$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = \omega,\quad \theta(t\equiv 0) = \theta(0),$$
$$\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = -\{r_1r_{22} - r_2r_{12} + [2(r_1r_{11} + r_2r_{21}) + k_1 + k_2r^2]\omega +$$
$$+ (r_1+m\lambda)\sin\theta + r_2\cos\theta\}/(m\lambda^2 + r^2),\quad \omega(t\equiv 0) = \omega(0),$$
$$f_X = [r_{12} - (2r_{21}+k_2r_2)\omega - (r_1 + \lambda m)\omega^2 - r_2\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t]\cos\theta - [r_{22} +$$
$$+ (2r_{11} + k_2r_1)\omega - r_2\omega^2 + (r_1 + \lambda m)\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t]\sin\theta - (m + 1), \tag{7}$$
$$f_Y = [r_{12} - (2r_{21} + k_2r_2)\omega - (r_1 + \lambda m)\omega^2 - r_2\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t]\sin\theta + [r_{22} +$$
$$+ (2r_{11} - k_2r_1)\omega - r_2\omega^2 + (r_1 + \lambda m)\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t]\cos\theta,$$
$$f = (f_X^2 + f_Y^2)^{1/2},\quad m_S = -k_1\omega,\quad e_k = (mv_1^2 + v_2^2)/2.$$

Управляващите функции (1) приемат следния безразмерен вид

$$r_1 = r_0 + u_1\sin(2\omega_0t),\quad r_2 = u_2\sin(\omega_0t). \tag{8}$$

където: компонентите на вектора $\mathbf{u} \equiv [u_1, u_2]^T$ са варируемите параметри от областта $\mathbf{\Pi} \equiv \{\mathbf{u}\in\mathbf{E}^2: \mathbf{u}^- \le \mathbf{u} \le \mathbf{u}^+\}$; $\mathbf{u}^-$ и $\mathbf{u}^+$ – зададените гранични стойности на вектора $\mathbf{u}$.

КРИТЕРИИ ЗА ОПТИМАЛНОСТ

Въвеждаме три критерия за оптималност като безразмерни характеристики на параметричните трептения в зададен интервал $t\in\mathbf{I_t} \equiv [0, t^*]$, съдържащ преходен и установен режим на люлеене.

Основната цел на всеки човек, люлеещ се чрез самозасилване, е да максимизира осреднения ъгъл

$$f_1 = (1/t^*)\int_0^{t^*}|\varphi(t)|dt \tag{9}$$

на отклонение $\varphi(t) = \theta(t) + \mathrm{arctg}(R_2(t)/R_1(t))$ на точковата маса M_2 от вертикалното й положение.

Динамичното въздействие върху човека при люлеене може да се оцени с осредненото претоварване

$$f_2 = (1/t^*)\int_0^{t^*}a(t)dt\,, \tag{10}$$

което трябва да се минимизира.

В енергетичен аспект люлеенето може да се окачестви с големината на осреднената безразмерна кинетична енергия

$$f_3 = (1/t^*)\int_0^{t^*}e_k(t)dt\,, \tag{11}$$

която трябва да се максимизира.

Обединяваме въведените характеристики във векторен критерий $\mathbf{f} \equiv [-f_1,\ f_2,\ -f_3]^T$, който подлежи на съгласувано минимизиране.

ОПТИМИЗАЦИОННА ЗАДАЧА

Тъй като диференциалните уравнения (7) се удовлетворяват алгоритмично със зададена точност, допустимото множество от стойности на вектора **u** се определя неявно от множеството $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{u} \in \mathbf{\Pi}: |\varphi(\mathbf{u},t)|/\varphi^+ - 1 \le 0,\ t \in \mathbf{I_t},\ f_2(\mathbf{u})/f_2^+ - 1 \le 0\}$, където φ^+ и f_2^+ са зададени пределно допустими стойности на φ и f_2.

За да се определи фазовото състояние на махалото в зададен интервал $t \in \mathbf{I_t}$ при избран управляващ вектор $\mathbf{u} \in \mathbf{D}$, трябва да се решат диференциалните уравнения (7) с управляващите функции (8).

Задачата за многокритериален синтез може да се формулира като разширена задача на нелинейното многоцелево оптимиране

$$\mathrm{Pmin}_{\mathbf{u} \in \mathbf{D}}\ \mathbf{f}(\mathbf{u}), \tag{12}$$

където операторът "Pmin" означава определяне на глобално Парето-минимални компромисни стойности на векторния критерий $\mathbf{f} \in \mathbf{P} \equiv \{\mathbf{f}(\mathbf{u}) \in \mathbf{E}^3: \mathbf{u} \in \mathbf{D}\}$.

Решаването на задача (12) се основава на принципа за съгласувана оптималност на Парето [8]. Оптимално решение са две Парето-множества $\mathbf{D}^* \equiv \{\mathbf{u}^*: \mathbf{u}^* = \arg \mathrm{Pmin}_{\mathbf{u} \in \mathbf{D}}\ \mathbf{f}(\mathbf{u})\}$ и $\mathbf{P}^* \equiv \{\mathbf{f}^*: \mathbf{f}^* = \mathbf{f}(\mathbf{u}^*)\}$ от съответните неподобряеми точки $\mathbf{u}^* \in \mathbf{D}^*$ и $\mathbf{f}^* \in \mathbf{P}^*$. Изборът на едно компромисно решение може да се улесни съществено, ако се осъществи от обосновано намалени подмножества на $\mathbf{D}^*$ и $\mathbf{P}^*$.

ОПТИМИЗАЦИОННА ПРОЦЕДУРА

За решаване на формулираната многокритериалната задача ще използваме двуетапната процедура PSIMS [7].

В Етап 1 се определят приблизително Парето-оптимални множества $\mathbf{D}^*$ и $\mathbf{P}^*$ с универсалния метод метод PSI (Parametric Space Investigation) за изследване чрез квазиравномерно сондиране на многомерни области със Соболеви пробни точки [5].

В Етап 2 се селекционират ранжирани по ред на ефективност $R_E \in \mathbf{M}_{\mathbf{R_E}} \equiv \{6, 5, \ldots, 1\}$ Парето-подмножества $\mathbf{P}_{\mathbf{R_E}} \subset \mathbf{P}^*$ с помощта на минималните стойности μ_ν^*, $\nu \in \{1, 2, 3\}$ на компонентите на векторен критерий $\mu \equiv [\mu_1, \mu_2, \mu_3]^T \in \mathbf{M} \equiv \{\mu(\mathbf{f}^*) \in \mathbf{E}^3: \mathbf{f}^* \in \mathbf{P}^*\}$. Те съответстват на разстоянията между три характерни точки **f**: утопичната точка $\mathbf{f}^{\mathbf{U}}$; текущата компромисна точка $\mathbf{f}^*$ и нейната проекция $\mathbf{f}^{\mathbf{UN}}$ върху хиперправата, която съединява утопичната и антиутопичната $\mathbf{f}^{\mathbf{N}}$ точки. В общия случай критериите μ_ν са независими, защото минималните разстояния μ_ν^* съответстват на различни точки $\mathbf{f}^*$.

Подмножеството $\mathbf{P}_{\mathbf{R_E}}$ с най-висок ред $R_E = 6$ на ефективност съдържа само една точка, която е Салуквадзе-оптимално [9] решение $(\mathbf{u}^{\mathbf{S}}, \mathbf{f}^{\mathbf{S}})$. То разкрива потенциалните възможности за равномерно доближаване на частните критерии **f** до техните безкомпромисни оптимални стойности $\mathbf{f}^{\mathbf{U}}$.

Окончателното компромисно решение може да се избере чрез неформален анализ на ранжираните Парето-оптимални подмножества $\mathbf{P}_{\mathbf{R_E}}$, $R_E \in \mathbf{M}_{\mathbf{R_E}}$.

РЕЗУЛТАТИ

Математичният модел има следните безразмерни параметри: λ, m, k_1, k_2, r_0, u_1, u_2, $\theta(0)$, $\omega(0)$. Като основни, когато не се променят в числения експеримент, са избрани следните стойности на размерните параметри: $m_1 = 10$ kg; $m_2 = 20$ kg; $R_0 = 2.8$ m; $L_1 = 3.4$ m; $\theta(0) = 0$; $\Omega(0) = 0$; $K_1 = 0.3$ kgm^2/s; $K_2 = 2$ kg/s; H_1, $H_2 \in [0.2, 0.4]$ m; $0 \le T \le T^*$; $T^* = 120$ s. Граничните стойности на въведените в оптимизационния модел ограничения са: $\varphi^+ = \pi/2$; $f_2^+ = 1.5$.

Численото интегриране на диференциалните уравнения (7) е осъществено с програмата ode113 на MATLAB® при относителна точност 10^{-6} и абсолютна точност 10^{-8}.

В Етап 1 на оптимизационната процедура се изпълнява двукратно сондиране по метода PSI [5]. Първо се осъществява сондиране с 2^{10} квазиравномерно разпределени Соболеви пробни точки и се определя множество от Парето-оптимални точки. След това в интервалите на изменение на управляващите параметри **u**, съответстващи на намерените компромисни точки, се прави ново сондиране с 2^{12} пробни точки и се селекционира Парето-множество. В обединеното множество от получените компромисни решения на направените сондирания се излъчва окончателен Парето-оптимален фронт от точки **P***.

В Етап 2 с μ-селекция се определят шест подмножества $\mathbf{P}_{\mathbf{R_E}} \subset \mathbf{P}^*$, ранжирани по ред на ефективност $R_E \in \mathbf{M}_{\mathbf{R_E}} \equiv \{6, 5, \ldots, 1\}$.

Салуквадзе-оптималното решение $(\mathbf{u}^{\mathbf{S}}, \mathbf{f}^{\mathbf{S}})$ с ред на ефективност $R_E = 6$ е представено в Таблица 1. В нея са посочени и стойността на максималния ъгъл φ_{max}, и на максималното претоварване a_{max}, които възникват в преходния режим на самозасилване.

Селекционирани Парето-оптимални решения с ред на ефективност R_E Таблица 1

R_E	u_1	u_2	f_1	f_2	f_3	φ_{max}	a_{max}
6	0.0912	0.1319	0.4267	0.4806	0.1835	0.9464	0.9001
5	0.1287	0.1307	0.5304	0.6098	0.2755	1.1896	1.0690
1	0.0733	0.1125	0.3548	0.3991	0.1340	0.8747	0.7903

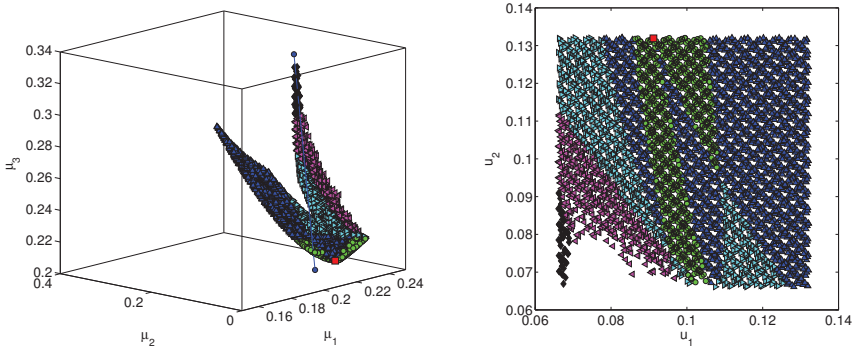
На фиг. 3 точките в пространства **M**, **D** и **P**, съответстващи на Салуквадзе-оптимума са означени със символа " ■ ", а точките с ред на ефективност 5, 4, ..., 1 – съответно с " ●, ▲, ▶, ◀, ♦ ".

На фиг. 4a са представени траекториите на точките M_1 и M_2 в безразмерен вид, получени за Салуквадзе-оптимума при $H_1 \approx 0.3$ m, $H_2 \approx 0.4$ m, $0 \le T \le 120$ s. Същите траектории в разширеното конфигурационно пространство (x,y,t) са показани на фиг. 4b. Максималният ъгъл на отклонение е $\varphi_{max} = 69°$.

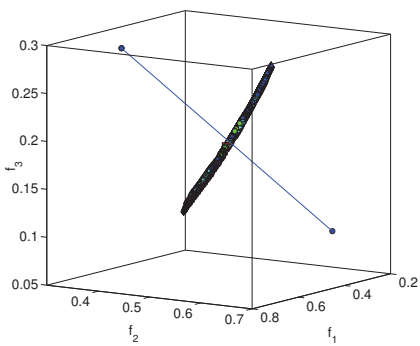
Началното състояние на махалото-люлка е неустойчиво (фиг. 4c). От фазовата диаграма $\omega = \omega(\theta)$ се вижда, че изобразяващата точка се отдалечава от началото, достига максимално отклонение и преминава в граничен цикъл, съответстващ на установено движение, за който $\theta < \theta_{max}$.

Изменението на посоката и големината на безразмерната реакция в цилиндричната става O е показано на фиг. 4d. Максималната ѝ стойност е $F_{max} = 532$ N.

Динамичното въздействие върху човека при люлеенето може да се оцени с максималното претоварване. На фиг. 4e е изобразена зависимостта на претоварването от ъгъла на отклонение на люлката. Максималната ѝ стойност a_{max} от Таблица 1 за $R_E = 6$ възниква в преходния режим. В установен режим на люлеене $a < 1$, което е благоприятно за люлеенето на деца.

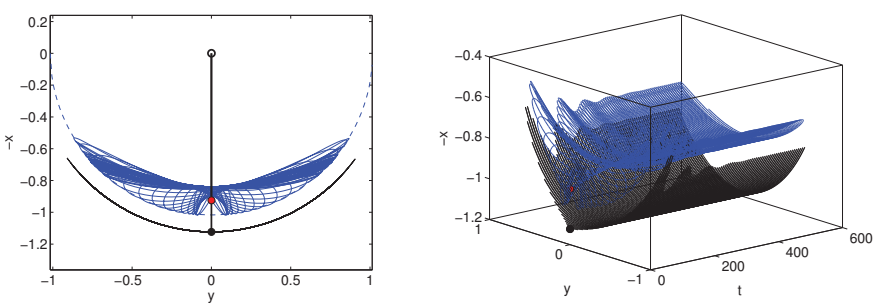


(a) (b)

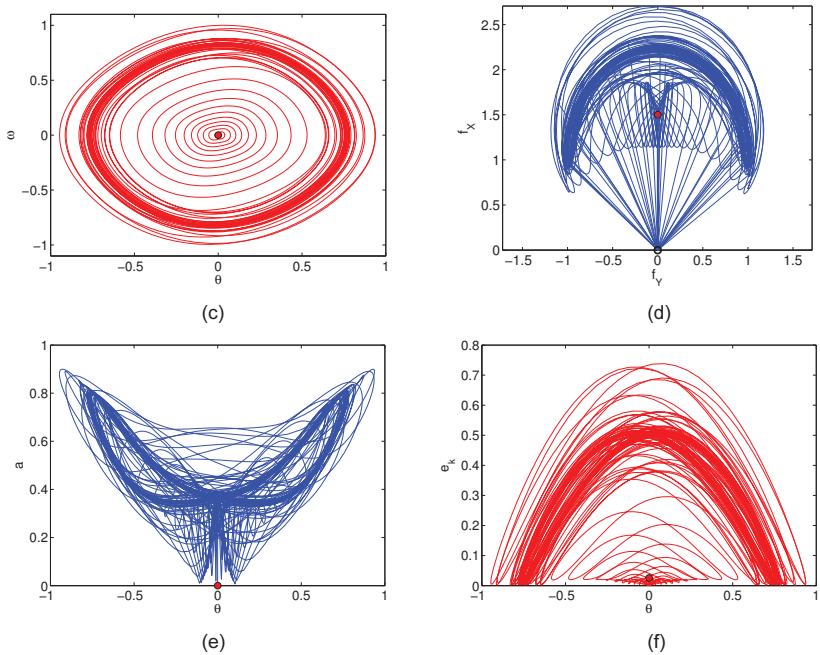


(c)

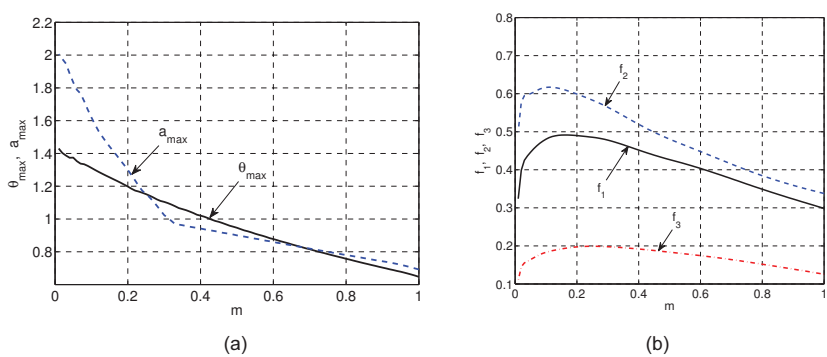
Фиг. 3. Ранжирани парето-оптимални точки в пространства: (a) M; (b) D; (c) P



(a) (b)



Фиг. 4. Салуквадзе-оптимални резултати: (a) траектории на точки M_1 и M_2; (b) (x,y,t)-диаграма; (c) фазов портрет $\omega(\theta)$; (d) ходограф на ставната реакция $F(t)$, $t \in \mathrm{I_t}$; (e) претоварване $a(\theta)$; (f) безразмерна кинетична енергия $e_k(\theta)$



Фиг. 5. Функции за $u \equiv u^S$: (a) $\theta_{max}(m)$, $a_{max}(m)$; (b) $f_i(m)$, $i \in \mathrm{I_i}$

Кинетичната енергия на системата нараства интензивно с увеличаване на амплитудата (фиг. 4f). Нейното изменение е асиметрично в двете посоки на завъртане на махалото-люлка.

На фиг. 5 е илюстрирано влиянието на изменението на отношението m на масите на люлката и човека върху максималния ъгъл θ_{max} на отклонение на люлката, претоварването a_{max}, критериите f_1 и f_2. Безопасни стойности на претоварването a_{max} се постигат при $m \geq 0.3$.

В Таблица 1 са посочени и два алтернативни варианта на Салуквадзе-оптималното решение. Вариантът с ред на ефективност $R_E = 5$ е селекциониран по максималните стойности на критериите f_1 и f_3, които възникват едновременно при $H_1 \approx \approx 0.40$ m, $H_2 \approx 0.35$ m. Вариантът $R_E = 1$ е с минимална стойност на критерия f_2. Той съответства на стил на самозасилване с амплитуди $H_1 \approx 0.22$ m, $H_2 \approx 0.35$ m на управляващите периодични смущения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формулираният оптимизационен модел с критерии за оптималност, определени за преходния и установения режим на самозасилване, както и използваната процедура за многокритериална оптимизация с μ-селекция на ранжирани по ред на ефективност Парето-подмножества, позволяват да се обоснове избора на амплитудите на параметричните смущения, който осигурява безопасно люлеене с рационални характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Айзерман, М.А. Классическая механика. Физматлит, Москва, 2005.

[2] Боздуганова, В.С., В.Г. Витлиемов. Трептения на двумасова дискретна механична система с двупараметрично възбуждане. Механика на машините, Т. 20 (96), №1, 83-87, 2012.

[3] Магнус, К. Колебания. Мир, Москва, 1982.

[4] Сейранян, А.П., А.О. Беляков. Динамика качелей. Доклады РАН, Т. 421, №1, 54-60, 2008.

[5] Соболь, И.М., Р.Б. Статников. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. Дрофа, Москва, 2006.

[6] Bae, S., Y.-H. Kang. Optimal pumping in a model of a swing. Europian Journal of Physics, Vol. 27, 75-86, 2006.

[7] Cheshankov, B.I., I.V. Ivanov, V.G. Vitliemov, P.A. Koev. PSI-method multi-criteria optimization contracting the set of trade-off solutions. 15th International Conference on Systems Science, Wroclaw, Poland, Vol. 1, 281-288, 2004.

[8] Ehrgott, M. Multicriteria Optimization. Springer, Berlin, 2005.

[9] Pinsky, M.A., A.A. Zevin. Oscillations of a pendulum with a periodically varying length and a model of swing. International Journal on Non-Linear Mechanics, Vol. 34, 105-109, 1999.

[10] Salukvadze, M.E. Vector-Valued Optimization Problems in Optimal Control Theory. Academic Press, New York, 1979.

[11] Stilling, D.S.D., W. Szyszkowski. Controlling angular oscillations through mass reconfiguration: a variable length pendulum case. International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 37, No. 1, 89-99, 2002.

[12] Strub, D.C. How do Childern Swing? Master Thesis. Department of Engineering Mathematics, University of Bristol, 2009.

[13] Udwadia, F.E., R.E. Kalaba. Analytical Dynamics: A New Approach. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[14] Wirkus, S., R. Rand, A. Ruina. How to pump a swing. The College Mathematics Journal, Vol. 29, No. 4, 266-275, 1998.

За контакти:

Д-р инж. Велина Боздуганова, Катедра “Техническа механика”, Русенски университет, тел.: 082-888 572, e-mail: velina@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран