

Равнинен винтов краен елемент с четири възела

Иво Драганов, Марко Тодоров

Plane helical finite element with four node: The deformation and the stiffness matrices of a four-node plane finite element are worked out, using the equations of the elasticity theory in helical coordinate system and special shape functions. The helical finite element is verified with analytical results in cylindrical coordinate system. Numerical examples are solved.

Key words: Helical Body, Plane Helical Finite Element, Finite Element Method.

ВЪВЕДЕНИЕ

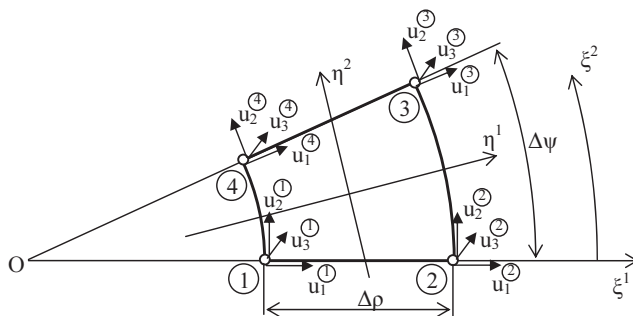
Коравинните матрици на четири възелови хексаедърни крайни елементи са известни [1], [3], [9]. Те са изведени в декартова локална координатна система (КС) като са използвани уравненията на теория на еластичността, изведени също в декартова КС [2].

В [7] са изведени зависимостите за еластична среда в условията на обобщено равнинно състояние.

Уравненията на еластична среда във винтова КС са изведени в [8]. Те са използвани за създаване на равнинен винтов краен елемент с четири възела.

ГЕОМЕТРИЯ И ФУНКЦИИ НА ФОРМАТА НА КРАЙНИЯ ЕЛЕМЕНТ

Равнинният винтов краен елемент с четири възела има вида показан на фиг. 1.



Фиг. 1. Равнинен винтов краен елемент с четири възела

Матрицата с координатните функции на преместванията е

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & N_{12} & 0 & 0 & N_{13} & 0 & 0 & N_{14} & 0 & 0 \\ 0 & N_{21} & 0 & 0 & N_{22} & 0 & 0 & N_{23} & 0 & 0 & N_{24} & 0 \\ 0 & 0 & N_{31} & 0 & 0 & N_{32} & 0 & 0 & N_{33} & 0 & 0 & N_{34} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Функциите на формата са

$$N_{11} = \frac{\xi_{(1)}^1}{\Delta\psi \left[(\xi_{(2)}^1)^2 - (\xi_{(1)}^1)^2 \right]} \frac{(\xi_{(2)}^1)^2 - (\xi^1)^2}{\xi^1} (\xi_{(2)}^2 - \xi^2);$$

$$N_{12} = \frac{\xi_{(2)}^1}{\Delta\psi \left[(\xi_{(2)}^1)^2 - (\xi_{(1)}^1)^2 \right]} \frac{(\xi^1)^2 - (\xi_{(1)}^1)^2}{\xi^1} (\xi_{(2)}^2 - \xi^2); \quad (2)$$

$$N_{13} = \frac{\xi_{(2)}^1}{\Delta\psi[(\xi_{(2)}^1)^2 - (\xi_{(1)}^1)^2]} \frac{(\xi_{(2)}^1)^2 - (\xi_{(1)}^1)^2}{\xi^1} (\xi^2 - \xi_{(1)}^2);$$

$$N_{14} = \frac{\xi_{(1)}^1}{\Delta\psi[(\xi_{(2)}^1)^2 - (\xi_{(1)}^1)^2]} \frac{(\xi_{(2)}^1)^2 - (\xi_{(1)}^1)^2}{\xi^1} (\xi^2 - \xi_{(1)}^2);$$

$$N_{21} = \frac{(\xi_{(1)}^1)^2}{\Delta\psi[(\xi_{(2)}^1)^4 - (\xi_{(1)}^1)^4]} \frac{(\xi_{(2)}^1)^4 - (\xi_{(1)}^1)^4}{(\xi^1)^2} (\xi_{(2)}^2 - \xi^2);$$

$$N_{22} = \frac{(\xi_{(1)}^1)^2}{\Delta\psi[(\xi_{(2)}^1)^4 - (\xi_{(1)}^1)^4]} \frac{(\xi^1)^4 - (\xi_{(1)}^1)^4}{(\xi^1)^2} (\xi_{(2)}^2 - \xi^2);$$

$$N_{23} = \frac{(\xi_{(1)}^1)^2}{\Delta\psi[(\xi_{(2)}^1)^4 - (\xi_{(1)}^1)^4]} \frac{(\xi^1)^4 - (\xi_{(1)}^1)^4}{(\xi^1)^2} (\xi^2 - \xi_{(1)}^2);$$

$$N_{24} = \frac{(\xi_{(1)}^1)^2}{\Delta\psi[(\xi_{(2)}^1)^4 - (\xi_{(1)}^1)^4]} \frac{(\xi_{(2)}^1)^4 - (\xi_{(1)}^1)^4}{(\xi^1)^2} (\xi^2 - \xi_{(1)}^2);$$

$$N_{31} = \frac{1}{\Delta\psi\Delta\rho} (\xi_{(2)}^1 - \xi^1)(\xi_{(2)}^2 - \xi^2);$$

$$N_{32} = \frac{1}{\Delta\psi\Delta\rho} (\xi^1 - \xi_{(1)}^1)(\xi_{(2)}^2 - \xi^2);$$

$$N_{33} = \frac{1}{\Delta\psi\Delta\rho} (\xi^1 - \xi_{(1)}^1)(\xi^2 - \xi_{(1)}^2);$$

$$N_{34} = \frac{1}{\Delta\psi\Delta\rho} (\xi_{(2)}^1 - \xi^1)(\xi^2 - \xi_{(1)}^2).$$

ИЗВЕЖДАНЕ НА ДЕФОРМАЦИОННАТА И КОРВАИННАТА МАТРИЦИ

Деформационната матрица е дадена в таблица 1.

Деформационна матрица

Таблица 1

	u_{1i}	u_{2i}	u_{3i}
γ_{11}	$\frac{\partial N_{2i}}{\partial \xi^1}$	0	0
γ_{22}	$\xi^1 N_{1i}$	$\frac{\partial N_{2i}}{\partial \xi^2}$	0
γ_{33}	$\alpha^2 \xi^1 N_{1i}$	0	0
γ_{12}	$\frac{1}{2} \frac{\partial N_{1i}}{\partial \xi^2}$	$\frac{1}{2} \frac{\partial N_{2i}}{\partial \xi^1} - \frac{1}{\xi^1} N_{2i}$	0
γ_{23}	$\alpha \xi^1 N_{1i}$	0	$\frac{1}{2} \frac{\partial N_{3i}}{\partial \xi^2}$

γ_{31}	0	$-\frac{\alpha}{\xi^1} N_{2i}$	$\frac{1}{2} \frac{\partial N_{3i}}{\partial \xi^1}$
γ_{21}	$\frac{1}{2} \frac{\partial N_{1i}}{\partial \xi^2}$	$\frac{1}{2} \frac{\partial N_{2i}}{\partial \xi^1} - \frac{1}{\xi^1} N_{2i}$	0
γ_{32}	$\alpha \xi^1 N_{1i}$	0	$\frac{1}{2} \frac{\partial N_{3i}}{\partial \xi^2}$
γ_{13}	0	$-\frac{\alpha}{\xi^1} N_{2i}$	$\frac{1}{2} \frac{\partial N_{3i}}{\partial \xi^1}$

Коравинната матрица се получава от зависимостта

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [C] [B] dV, \quad (3)$$

където [C] е матрица с материалните характеристики.

При равнинна задача, при дебелина на елемента h , за обема от интеграла (3) е в сила:

$$dV = h \det[J_1] d\rho d\psi, \quad (4)$$

където:

$$\det[J_1] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \end{bmatrix} = \rho \cos^2(\psi + \alpha\xi) + \rho \sin^2(\psi + \alpha\xi). \quad (5)$$

Връзката между винтовата КС и нормираните координати има вида:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} \rho_1 (1 - \xi) + \frac{1}{2} \rho_2 (1 + \xi), \\ \psi &= \frac{1}{2} \psi_1 (1 - \eta) + \frac{1}{2} \psi_2 (1 + \eta). \end{aligned} \quad (6)$$

За намирането на производните на функциите на формата спрямо нормираните координати е в сила:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \rho} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \psi} \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

където матрицата от дясно е матрицата на Якоби. Въведени са означенията:

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \rho_2 - \rho_1, \\ \Delta\psi &= \psi_2 - \psi_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Заместени са уравнения (6) в (7) и за матрицата на Якоби се получава:

$$[J_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta\rho & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta\psi \end{bmatrix}, \quad (10)$$

а детерминантата на матрицата на Якоби е

$$\det[J_2] = \frac{1}{4} \Delta\rho \Delta\psi. \quad (11)$$

Матрицата с материалните константи има вида:

$$[C] = G \begin{bmatrix} 2+\kappa & \kappa B & \kappa & 0 & -\alpha\kappa \\ \kappa B & B^2(2+\kappa) & 2\alpha^2+\kappa B & 0 & -\alpha B(2+\kappa) \\ \kappa & 2\alpha^2+\kappa B & 2+\kappa & 0 & -\alpha(2+\kappa) \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 \\ -\alpha\kappa & -\alpha B(2+\kappa) & -\alpha(2+\kappa) & 0 & B+\alpha^2(1+\kappa) \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 \\ -\alpha\kappa & -\alpha B(2+\kappa) & -\alpha(2+\kappa) & 0 & B+\alpha^2(1+\kappa) \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha\kappa & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha B(2+\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha(2+\kappa) & 0 \\ -\alpha & B & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & B+\alpha^2(1+\kappa) & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ -\alpha & B & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & B+\alpha^2(1+\kappa) & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

където $\kappa = \frac{2\mu}{1-2\mu}$, а $B = \frac{1+(\alpha\xi^1)^2}{(\xi^1)^2}$.

За интегриране на уравнение 3 са използвани 4 гаусови точки. Координатите, в които трябва да се определят функциите, са $\pm 1/\sqrt{3}$, а тегловият коефициент е единица [6].

За определяне на коравинната матрица се извършва числено интегриране на уравнение (3) по метода на Гаус. При двумерна област е в сила:

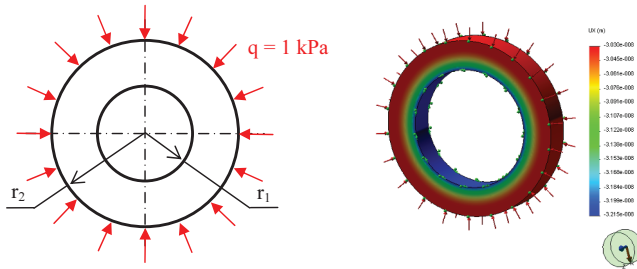
$$[K_e] = \sum_{i=1}^4 W_i W_j [B(\xi, \eta)]^T [C(\xi, \eta)] [B(\xi, \eta)] \det J_1(\xi, \eta) \det J_2(\xi, \eta). \quad (13)$$

ЧИСЛЕНИ ПРИМЕРИ

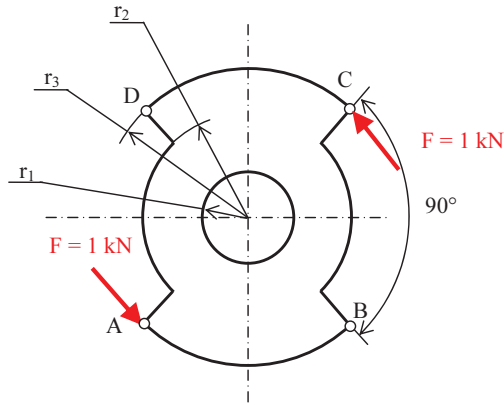
Пример 1. Определени са преместванията за показаното на фиг. 2 тяло, при използване на цилиндрични и винтови равнинни крайни елементи. Резултатите са сравнени с известни аналитични решения [4] и при изчисляване с пакета за крайни елементи в Солидуъркс (SolidWorks®) [5] – фиг. 3. Материалните и геометрични характеристики са: $r_1 = 2$ m, $r_2 = 3$ m, $h = 1$ m, модул на еластичност - $E = 210$ GPa и коефициент на Поасон - $\mu = 0,25$. Закрепването е статично определимо. Резултатите са дадени в таблица 2.

Таблица 2. Резултати за пръстен

Краен елемент	u_{r1} , mm x10 ⁻⁵	u_{r2} , mm x10 ⁻⁵
Цилиндрична КС с физ. компоненти - 4 възела	3,1308	2,9801
Винтова КС - 4 възела	3,2189	3,0388
Едномерна задача - аналитично решение	3,2143	3,0357
Солидуъркс – 12276 въз.	3,2150	3,0302

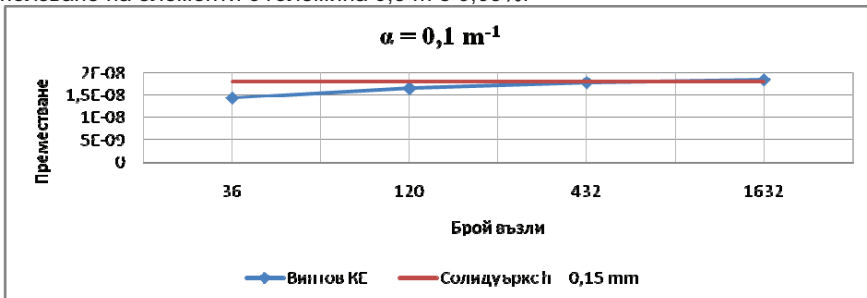


Пример 2 Определено е пълното преместване на т. В от тялото на фиг. 4, при стойности на винтовия параметър α : 0; 0,001; 0,01 и 0,1 m^{-1} , като е използван винтовият краен елемент. Направено е изследване за сходимост и резултатите са сравнени със Сolidуркс. Геометричните и материални характеристики са: $r_1 = 1$ m, $r_2 = 2$ m, $r_3 = 3$ m, $h = 1$ m, $E = 210$ GPa и $\mu = 0,25$.



Фиг. 4. Винтово тяло

На фиг. 5 е дадена графика на сходимостта при $\alpha = 0,1$ m^{-1} . Червената линия е приета за точно решение и е получена при големина на крайните елементи $h = 0,15$ m, което при $\alpha = 0,1$ отговаря на 52486 възела. Разликата в преместванията, при използване на елементи с големина 0,3 m е 0,63%.



Фиг. 5. Сходимост

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изведена е коравинната матрица на четиривъзлов винтов краен елемент като са използвани специални функции за преместванията.

Представеният числен пример за пръстен подложен на външно налягане показва, че резултатите съвпадат с известните аналитични решения. Вторият пример, при който резултатите са сравнени с решения получени чрез Солидуъркс, показва, че изведеният краен елемент е сходящ. Резултатите за преместванията определени със Солидуъркс при 51534 възела се различават с 1,7% от резултатите получени с изведения винтов елемент при 1632 възела.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Банков Б., Ю. Павлова. Метод на крайните елементи в строителната механика. УАСГ, София, 1999.

[2] Върбанов Хр. Теория на еластичността. Държавно издателство "Техника", 1965.

[3] Стойчев Г. Метод на крайните елементи. Якостен и деформационен анализ. София, 2000.

[4] Стойчев Ю. Съпротивление на материалите. Русе, 1986.

[5] Хаджийски В., Ст. Стефанов. Компютърен инженерен анализ на машинни елементи с CosmosWorks. Пловдив, 2007.

[6] Abramovitz M., I. Stegun. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, 1972.

[7] Kaloyanova V., M.Todorov. On generalized plane strain elasticity. Int. J. of theoretical and applied mechanics, Vol.32/2 pp.63-70, 2002.

[8] Todorov M., I. Draganov. Equations of elasticity theory in a helical coordinate system. IJSC MECHANICS, p. 253-264, 2010.

[9] Zienkiewicz O., R. Taylor. The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. Butterworth-Hainemann 2000.

За контакти:

Ас. инж. Иво Драганов, Катедра "Техническа механика", Русенски университет "Ангел Кънчев", тел.: 082 888 224, e-mail: iivanov@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран