Принудени ъглови трептения на агрегат с ДВГ, еластичен съединител, диференциал, полуоси със синхронни кардани и задвижвани маси със съпротивления

Илия Ангелов, Валентин Бачев, Ангел Попаров, Стефан Читаков

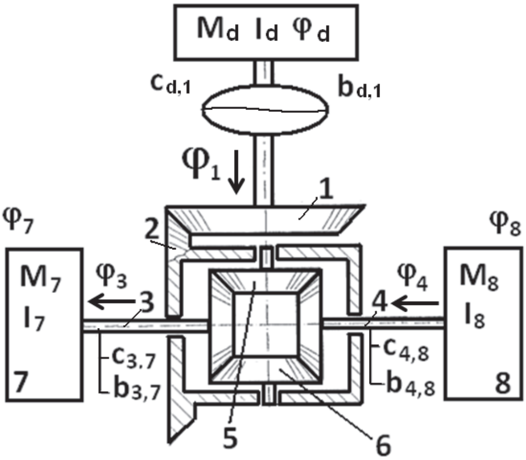
Forced vibrations of corner unit with engine, elastic clutch, differential, axles and universal joints synchronous driven tables with resistances*: In this work with the matrix mechanics study of the angular oscillation unit with engine, elastic clutch, differential, axles and universal joints synchronous driven masses. Be reported mass moments of inertia, angular coefficients of elasticity and damping, when the engine and driven resistance tables. They are composed differential equations, and in the presence of small oscillations are obtained solutions in matrix form suitable for use software Mathematics, Matlab etc.. in the synthesis of real machines.*

Key words: *engine, elastic clutch, differential, axles and universal joints synchronous driven masses.*

УВОД

За точно проектиране на агрегати, съдържащи двигател, еластичен съединител, диференциал, полуоси и задвижвани маси е необходимо да са получени формули за изчисляване на принудените трептения. Затова те са обект на изследване в настоящата работа, която е обект на продължение на изследванията на свободните и свободно- затихващите трептения на същия агрегат [4,5].

ИЗЛОЖЕНИЕ



Фиг.1 Динамичен модел

На фиг. 1 е даден динамичният модел на механична система (МС), съставена от двигател - еластичен съединител – диференциал - полуоси и задвижвани маси. Векторът на обобщените координати на МС има вида:

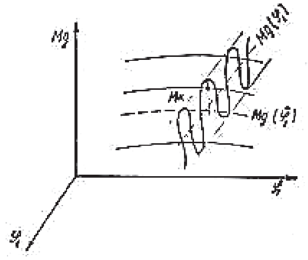
$$\mathbf{q} = [q_1 \;\; q_2 \;\; q_3 \;\; q_4 \;\; q_5]^T = [\varphi_d \;\; \varphi_3 \;\; \varphi_4 \;\; \varphi_7 \;\; \varphi_8]^T \tag{1}$$

Двигателният момент (фиг.2) на ДВГ е равен на:

$$M_d(\varphi_d, \dot{\varphi}_d) = M_d(\dot{\varphi}_d) + \sum_{k=1}^{n} M_k . \sin(k.\varphi_d + \alpha_d) \tag{2}$$

Съпротивителният момент, приложен към масите 7 и 8, е равен на:

$$\mathrm{M}_7 = \mathrm{M}_7(\varphi_7, \dot{\varphi}_7); \ \mathrm{M}_8 = \mathrm{M}_8(\varphi_8, \dot{\varphi}_8) \tag{3}$$



Фиг. 2 Изменение на двигателен момент

За кинематиката на агрегата може да се запишат [1] следните уравнения:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = \mathrm{a}_1\varphi_2 = \mathrm{a}_1\frac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_4); \qquad \varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_4); \\ &\varphi_5 = \mathrm{a}_2(\varphi_3 - \varphi_4); \qquad\qquad \varphi_6 = \mathrm{a}_2(\varphi_4 + \varphi_3) \end{aligned} \tag{4}$$

Кинетичната енергия на агрегата се записва в матричен вид с уравнението:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}.\mathbf{M}.\dot{\mathbf{q}}, \tag{5}$$

където членовете на матрицата на масите ***M*** се изчисляват с уравнението:

$$\mathrm{m}_{\mathrm{i,j}} = \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_{\mathrm{i}} \partial \dot{\mathrm{q}}_{\mathrm{j}}}; \quad \mathrm{m}_{\mathrm{i,j}} = \mathrm{m}_{\mathrm{j,i}};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A} & B & 0 & 0 \\ 0 & B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_8 \end{bmatrix} \tag{6}$$

където

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{a}_1^2.\mathrm{I}_1}{4} + \frac{\mathrm{I}_2}{4} + \mathrm{I}_3 + \mathrm{a}_2^2.\mathrm{I}_5 + \mathrm{a}_2^2.\mathrm{I}_6,$$

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{a}_1^2.\mathrm{I}_1}{4} + \frac{\mathrm{I}_2}{4} - \mathrm{a}_2^2.\mathrm{I}_5 + \mathrm{a}_2^2.\mathrm{I}_6$$

Потенциалната енергия на агрегата се записва в матричен вид с уравнението:

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}.\mathbf{c}.\mathbf{q}, \tag{7}$$

където членовете на матрицата на еластичните коефициенти са:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{d1} & -\frac{a_1 c_{d1}}{2} & -\frac{a_1 c_{d1}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1 c_{d1}}{2} & c_{37} + \frac{a_1^2 c_{d1}}{4} & \frac{a_1^2 c_{d1}}{4} & -c_{37} & 0 \\ -\frac{a_1 c_{d1}}{2} & \frac{a_1^2 c_{d1}}{4} & c_{48} + \frac{a_1^2 c_{d1}}{4} & 0 & -c_{48} \\ 0 & -c_{37} & 0 & c_{37} & 0 \\ 0 & 0 & -c_{48} & 0 & c_{48} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Демпфиращата енергия на агрегата се записва в матричен вид с уравнението:

$$B = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}.\mathbf{b}.\mathbf{q}, \quad (9)$$

където членовете на матрицата на демпфиращите коефициенти **b** се изчисляват с уравнението:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{d1} & -\frac{a_1 b_{d1}}{2} & -\frac{a_1 b_{d1}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1 b_{d1}}{2} & b_{37} + \frac{a_1^2 b_{d1}}{4} & \frac{a_1^2 b_{d1}}{4} & -b_{37} & 0 \\ -\frac{a_1 b_{d1}}{2} & \frac{a_1^2 b_{d1}}{4} & b_{48} + \frac{a_1^2 b_{d1}}{4} & 0 & -b_{48} \\ 0 & -b_{37} & 0 & b_{37} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{48} & 0 & b_{48} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Собствените честоти ω_i и собствените форми се изчисляват с уравнението:

$$\left|\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}\right| \mathbf{V} = 0 \quad (11)$$

където собствените честоти са: $\omega_1 = 0, \omega_2 \neq 0, \omega_3 \neq 0, \omega_4 \neq 0, \omega_5 \neq 0$

Собствената честота $\omega_1 = 0$ дефинира ротацията на агрегата.

На всяка собствена честота съответства вектор на собствените форми, който дефинира съотношението между обобщените координати при трептене с честота ω_r. Компонентите на векторите дефинират матрицата на векторите на собствените форми, която има вида:

$$\mathbf{V} = \left[v_{i,j}\right]_{(5\times5)} \quad (12)$$

където $\mathbf{v_i} = \left[\mathbf{v_{i1}}\ \mathbf{v_{i2}}\ \mathbf{v_{i3}}\ \mathbf{v_{i4}}\ \mathbf{v_{i5}}\right]^T$ е векторът на собствените форми по обобщените координати за *i*-та собствена честота.

Диференциалните уравнения, описващи принудените трептения, се съставят по метода на Ангелов, И. [1]:

$$\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}.\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}.\mathbf{q} = \mathbf{Q}. \quad (13)$$

където **M**, **B**, **C** характеризират съответно инерционните, демпфиращите и еластичните свойства, $\mathbf{Q} = \left[M_d\ \ 0\ \ 0\ \ M_7\ \ M_8\right]$ е вектор на обобщените външни сили, $q = \left[q_1, q_2, \ldots, q_5\right]^T$ е вектор на обобщените координати.

1. Решение на диференциалните уравнения чрез метода на главните координати

При изпълнено условие за пропорционалност

$$\mathbf{B} = \alpha.\mathbf{M} + \gamma.\mathbf{C} \tag{14}$$

и като се има предвид условието за преход от обобщени в главни координати

$$\mathbf{q}' = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}.\mathbf{q} \quad , \tag{15}$$

системата диференциални уравнения (15) в главни координати има вида

$$\mathbf{M}_{\mathbf{q}'}.\ddot{\mathbf{q}}' + \mathbf{B}_{\mathbf{q}'}.\dot{\mathbf{q}}' + \mathbf{C}_{\mathbf{q}'}.\mathbf{q}' = \mathbf{Q}', \tag{16}$$

където

$$\mathbf{M}_{\mathbf{q}'} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}}.\mathbf{M}.\mathbf{V}; \quad \mathbf{B}_{\mathbf{q}'} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}}.(\alpha.\mathbf{M} + \gamma.\mathbf{C}).\mathbf{V}; \quad \mathbf{C}_{\mathbf{q}'} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}}.\mathbf{C}.\mathbf{V} \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}.\mathbf{Q} \tag{17}$$

От (16) се получават независими диференциални уравнения от вида

$$\mathrm{m_{ii}}.\ddot{\mathbf{q}}' + \mathrm{b_{ii}}.\dot{\mathbf{q}}' = 0, \quad \mathrm{i} = 1 \tag{18}$$

$$\mathrm{m_{ii}}.\ddot{\mathbf{q}}' + \mathrm{b_{ii}}.\dot{\mathbf{q}}' + \mathrm{c_{ii}}.\mathbf{q}' = \mathbf{Q}'_{\mathrm{ii}}, \quad \mathrm{i} = 2,3,4,5 \quad , \tag{19}$$

където $\mathrm{b_{ii}} = \alpha.\mathrm{m_{ii}} + \gamma.\mathrm{c_{ii}}$.

Като се вземе предвид, че

$$2.\xi_{\mathrm{i}}.\omega_{\mathrm{ii}} = \frac{\mathrm{b_{ii}}}{\mathrm{m_{ii}}} = \alpha + \gamma.\omega_{\mathrm{ii}}^2; \tag{20}$$

ω_{ii} - собствена честота на недемпфираната система.

$\omega_1 = 0,\ \omega_2 \neq 0,\ \omega_3 \neq 0,\ \omega_4 \neq 0,\ \omega_4 \neq 0,\ \omega_5 \neq 0.$

Следователно (19) може да се запише във вида

$$\ddot{\mathbf{q}}'_{\mathrm{i}} + 2.\xi.\omega_{\mathrm{i}}.\dot{\mathbf{q}}'_{\mathrm{i}} + \omega_{\mathrm{i}}^2.\mathbf{q}'_{\mathrm{i}} = \frac{1}{\alpha}.\mathbf{Q}'_{\mathrm{i}} \tag{21}$$

Ако смущаващите сили са периодични, решението на (21) за чисто принудените трептения има вида

$$\mathbf{q}'_{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\dfrac{\mathbf{V}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}.\mathbf{Q}_{\mathrm{k}}}{\mathrm{m_{ii}}}}{\sqrt{\left(\omega_{\mathrm{ii}}^2 - \Omega_{\mathrm{k}}^2\right)^2 + 4.\xi_{\mathrm{ii}}^2.\Omega_{\mathrm{k}}^2}}.\sin\left(\Omega_{\mathrm{k}}.\mathrm{t} - \Psi_{\mathrm{k}}\right), \tag{22}$$

където $\mathrm{m_{ii}}$ е елемент на диагоналната матрица $\mathbf{M}_{\mathrm{q'}}$, Ω_k е честотата на к$^{\text{-тия}}$ хармоник на принудените трептения, $\boldsymbol{Q}_k$ е векторът на амплитудата на к$^{\text{-тия}}$ хармоник на обобщените сили, Ψ_k е фазовият ъгъл на к$^{\text{-тия}}$ хармоник.

$$\Psi_{\mathrm{k}} = \arctan\frac{2.\delta_{\mathrm{ii}}.\Omega_{\mathrm{k}}}{\omega_{\mathrm{ii}}^2 - \Omega_{\mathrm{k}}^2}, \quad 0 \le \Psi_{\mathrm{k}} \le \pi \tag{23}$$

При резонанс, $\omega_{\mathrm{i}} = \Omega_{\mathrm{k}}$

$$\mathbf{q}'_{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\dfrac{\mathbf{V}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}.\mathbf{Q}_{\mathrm{k}}}{\mathrm{m_{ii}}}}{2.\xi_{\mathrm{ii}}.\Omega_{\mathrm{k}}}.\sin\left(\Omega_{\mathrm{k}}.\mathrm{t} - \Psi_{\mathrm{k}}\right) \tag{24}$$

2. Решение на уравнение (18)

$$\mathbf{q}'_{\mathrm{i}} = \mathbf{q}'(0) + \frac{\mathrm{Q}'_1}{\mathrm{B}_1}.\mathrm{t} \tag{25}$$

ИЗВОД

В настоящия труд са съставени формули за кинетичната, потенциалната, демпфиращата енергия и обобщените смущаващи сили на ъглови трептения на механичната система двигател - еластичен съединител – диференциал - полуоси и задвижвани маси. Съставени са диференциални уравнения за принудените трептения. Определени са собствените честоти и решенията на принудените трептения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ангелов, И., Матрична теория на вибрациите в техниката, „Авангард Прима", 2012.

[2] Ангелов, И., Матрична механика. Динамика, „Авангард Прима", 2012

[3] Ангелов, И., В. Славов, Сборник задачи Матрична механика. Динамика и трептения, София, „Авангард Прима", 2008

[4] Ангелов, Ил., В. Славов, Д. Кожухаров, Ст. Читаков, Принудени нелинейни пространствени трептения на съчленено транспортно средство с едноосно ремарке, породени от 3D смущения от неравностите на пътя, сп. „Машиностроене & Електротехника", Специален брой, 2005, стр. 94-97

[5] Бачев В., В. Николов, Ил. Ангелов, Механо-матрично моделиране в пространството на принудените трептения на агрегат с ДВГ върху стенд, Сп. „Механика на машините" година XX, книга 4, 2012, стр. 33-36.

[6] Ангелов Ил., Д. Желев, В. Бачев, В. Николов, Механо-математично матрично моделиране на пространствените принудени трептения на мотокар, породени от работата на ДВГ и вентилатора на охладителната уредба, Научна конференция, гр. Русе, 26-28.10.2012, Сборник доклади

[7] Бачев В., Ч. Ангелов, Д. Желев, Ст. Стоев, Свободни затихващи ъглови трептения на агрегат с двигател, еластичен съединител, диференциал, полуоси със синхронни кардани и задвижвани маси, Научна конференция, гр. Русе, 26-28.10.2012, Сборник доклади

[8] Читаков, С. Свободни ъглови трептения на система двигател – еластичен съединител - диференциал - полуоски и задвижвани маси, сп. „Механика на машините", брой 100, 2012

[9] Amiroche F. Computer – Aided design and manufacturing. Prentice Hall, Englewood Clifs, New Jersy, 1993

За контакти:

Доц. д.т.н. д-р инж. Илия Ангелов, Технически университет - София, тел.: (+359) 888-255 902, e-mail: il.angelov@abv.bg **;**

Гл. ас. д-р инж. Стефан Читаков, Катедра „Механика", Технически университет - София, тел. (+359) 895-587-123, e-mail: budokan_sport@abv.bg **;**

Гл. ас. инж. Валентин Бачев, Катедра „Машиностроене и уредостроене", Технически университет - София, филиал Пловдив, тел.: (+359) 895-587 381, e-mail: abc4@abv.bg **;**

Гл. ас. инж. Ангел Попаров, Катедра „Машиностроителна техника и технологии", Технически университет - София, филиал Пловдив, тел.: (+359) 895-587 396, e-mail: poparan@abv.bg **.**

Докладът е рецензиран.