Свободни затихващи ъглови трептения на агрегат с двигател, еластичен съединител, диференциал, полуоси със синхронни кардани и задвижвани маси

Валентин Бачев, Чавдар Ангелов, Деян Желев, Стойчо Стоев

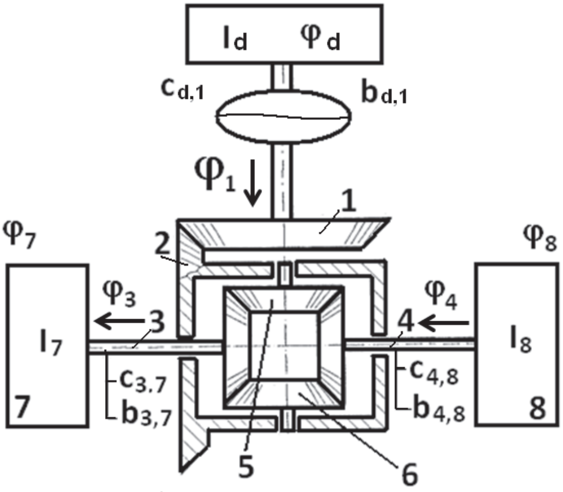
Damping of angular oscillation of unit with engine, flexible coupling, differential, two axles with universal joints synchronous and two powered fixtures: *In this article was created dynamic model which characterizes free evanescent oscillations of a mechanical system with 5 degrees of freedom consisting of engine - elastic coupling - differential – two powered axles and two powered fixtures. Particular function is to dissipate energy. Differential equations are derived oscillation in matrix form and solutions are given. Presented is the second solution, which uses the method of principal coordinates.*

Keywords*: mechanics, molds, angular oscillation, kinematics, dynamics*

УВОД

Задвижващият агрегат в съвременните автомобили съдържа двигател, еластичен съединител, скоростна кутия, диференциал, полуоси и задвижващи колела. На фиг.1 е показан динамичен модел на такъв агрегат, който не отчита влиянието на скоростната кутия, както е при електромобилите. С I_d до I_8 са означени масовите инерционни моменти, а с c_{ij} и b_{ij} са означени съответно коефициентите на еластичност и коефициентите на демпфиране на съединителя и съответните валове.

ИЗЛОЖЕНИЕ



Фиг.1 Динамичен модел

Векторът на обобщените координати на механичната система има вида:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \varphi_d & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_7 & \varphi_8 \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

За кинематиката на агрегата може да се запишат [1] следните уравнения:

$$\varphi_d;\ \varphi_1 = a_1 \frac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_4);\ \varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_4);\ \varphi_5 = a_2(\varphi_3 - \varphi_4);\ \varphi_6 = a_2(\varphi_4 + \varphi_3);\ \varphi_7;\ \varphi_8. \quad (2)$$

Кинетичната енергия на агрегата се записва в матричен вид с уравнението:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathsf{T}}.\mathbf{M}.\dot{\mathbf{q}}, \tag{3}$$

където матрицата на масите ***M*** с членове m_{ij} е равна на:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A} & B & 0 & 0 \\ 0 & B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_8 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

където

$$\mathrm{A} = \frac{a_1^2.I_1}{4} + \frac{I_2}{4} + I_3 + a_2^2.I_5 + a_2^2.I_6,$$

$$\mathrm{B} = \frac{a_1^2.I_1}{4} + \frac{I_2}{4} - a_2^2.I_5 + a_2^2.I_6$$

Потенциалната енергия на агрегата в матричен вид се записва с уравнението:

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathsf{T}}.\mathbf{c}.\mathbf{q}, \tag{5}$$

където матрицата на еластичните коефициенти **C** с членове c_{ij} е равна на:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{d1} & -\frac{a_1\, c_{d1}}{2} & -\frac{a_1\, c_{d1}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1\, c_{d1}}{2} & c_{37} + \frac{a_1^2\, c_{d1}}{4} & \frac{a_1^2\, c_{d1}}{4} & -c_{37} & 0 \\ -\frac{a_1\, c_{d1}}{2} & \frac{a_1^2\, c_{d1}}{4} & c_{48} + \frac{a_1^2\, c_{d1}}{4} & 0 & -c_{48} \\ 0 & -c_{37} & 0 & c_{37} & 0 \\ 0 & 0 & -c_{48} & 0 & c_{48} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Уравнението на демпфиращата енергия на агрегата в матричен вид е равно на:

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathsf{T}}.\mathbf{B}.\mathbf{q}, \tag{7}$$

където матрицата на демпфирането **B** с коефициенти b_{ij} е равна на:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{d1} & -\frac{a_1\, b_{d1}}{2} & -\frac{a_1\, b_{d1}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1\, b_{d1}}{2} & b_{37} + \frac{a_1^2\, b_{d1}}{4} & \frac{a_1^2\, b_{d1}}{4} & -b_{37} & 0 \\ -\frac{a_1\, b_{d1}}{2} & \frac{a_1^2\, b_{d1}}{4} & b_{48} + \frac{a_1^2\, b_{d1}}{4} & 0 & -b_{48} \\ 0 & -b_{37} & 0 & b_{37} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{48} & 0 & b_{48} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Собствените честоти ω_i и собствените форми **V** се изчисляват с уравнението:

$$\lfloor \mathbf{C} - \omega^2.\mathbf{M} \rfloor \mathbf{V} = 0 \tag{9}$$

където собствените честоти са: $\omega_1 = 0,\ \omega_2 \neq 0,\ \omega_3 \neq 0,\ \omega_4 \neq 0,\ \omega_5 \neq 0$

Собствената честота $\omega_1 = 0$ дефинира ротацията на агрегата.

На всяка собствена честота съответства вектор на собствените форми, който дефинира съотношението между обобщените координати при трептене с честота ω_r. Компонентите на векторите дефинират матрицата на векторите на собствените форми, която има вида:

$$\mathbf{V} = \lfloor v_{i,j} \rfloor_{(5\times5)} \tag{10}$$

където $\mathbf{v_i} = [\mathbf{v_{i1}}\ \mathbf{v_{i2}}\ \mathbf{v_{i3}}\ \mathbf{v_{i4}}\ \mathbf{v_{i5}}]^T$ е векторът на собствените форми по обобщените координати за *i*-та собствена честота.

1. Диференциални уравнения

Системата диференциални уравнения на свободните затихващи нелинейни трептения на МС се получава при прилагане метода на Ил. Ангелов. Като вземем изразите за кинетичната енергия, потенциалната енергия, функцията на Релей, се получават диференциалните уравнения за свободните затихващи трептения на изследваната механична система:

$$\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}.\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}.\mathbf{q} = 0, \tag{11}$$

2. Решение на системата диференциални уравнения

Решението на (11) се търси във вида:

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}.e^{pt} \tag{12}$$

След диференциране на това уравнение и заместване в (11) се получава уравнение:

$$\left(p^2.\mathbf{M} + p.\mathbf{B} + \mathbf{C}\right).\mathbf{V} = 0 \tag{13}$$

Трептенията се дефинират от собствените стойности p_r и собствените вектори $\boldsymbol{u_r}$, които в общия си вид са комплексно спрегнати числа. Уравнението на собствените стойности е равно на:

$$p_r = -\alpha_r + i\beta_r \tag{14}$$

Уравнението на собствените вектори е равно на:

$$\mathbf{u}_r = v_r + iw_r, \quad \alpha_r = \sigma_r.\omega_r, \quad \beta_r = \omega_r\sqrt{1-\sigma_r^2} \tag{15}$$

където σ_r е относителен коефициент на демпфиране; α_r е коефициент на демпфиране; β_r е честота на свободно затихващите трептения; w_r е имагинерна част на собствения вектор, породена от демпфиране на системата; v_r, ω_r са собствените форми и собствените честоти на недемпфираната система.

При изчисляване на α_r и w_r, от матриците $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{B}$ се образува матрицата K:

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{V}^T.\mathbf{M}.\mathbf{V}\right)^{-1}.\left(\mathbf{V}^T.\mathbf{B}.\mathbf{V}\right) = [k_{ik}] \tag{16}$$

За коефициентите на демпфиране се получава:

$$\alpha_r = \frac{1}{2}k_{rr} \tag{17}$$

С матрицата $\boldsymbol{K}$ се образува матрицата $\boldsymbol{D}$:

$$\mathbf{D} = [d_{ik}], \quad \left| \begin{array}{l} d_{ik} = 0,\ при\ \omega_i^2 = \omega_k^2 \quad ; \\ d_{ik} = k_{ik}\dfrac{\omega_k}{\left(\omega_k^2 - \omega_i^2\right)},\ при\ \omega_i^2 \neq \omega_k^2 \end{array} \right. \tag{18}$$

Матрицата ***W*** на имагинерната част на собствените вектори на демпфираната система се изчислява с формулите:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V.D}\ , \tag{19}$$

където: $\mathbf{V} = \left[\mathrm{v_{rk}}\right]_{(5\times5)}$, $\mathbf{D} = \left[\mathrm{d_{ik}}\right]_{(5\times5)}$ (20)

Общите решения на системата за собствените стойности p_r и собствените вектори u_r се получават, като се определят началните условия на движение. При начални условия $\mathrm{t}=0,\ \mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_0,\ \dot{\mathbf{q}}(0)=\dot{\mathbf{q}}_0,$ общите решения на системата диференциални уравнения [4], записани в матричен вид, са:

$$q(t)=\sum_{r=1}^{5}\frac{2}{\mathbf{g}_r^2+\mathbf{h}_r^2}\begin{bmatrix}\mathbf{G_r M\dot{q}}(0)+\\ \begin{pmatrix}-\alpha_r\mathbf{G_r M}+\\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{r}\mathbf{H_r M}+\\ \mathbf{G_r B}\end{pmatrix}\mathbf{q}(0)\end{bmatrix}.e^{-\alpha_r t}.\cos\beta_t\ t+\sum_{r=1}^{5}\frac{2}{\mathbf{g}_r^2+\mathbf{h}_r^2}\begin{bmatrix}\mathbf{H_r M\dot{q}}(0)+\\ \begin{pmatrix}-\alpha_r\mathbf{H_r M}-\\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{r}\mathbf{G_r M}+\\ \mathbf{H_r B}\end{pmatrix}\mathbf{q}(0)\end{bmatrix}.e^{-\alpha_r t}.\sin\beta_r\ t \tag{21}$$

където:

$$\begin{aligned}&\mathbf{g}_\mathrm{r}=-2\alpha_\mathrm{r}\left(\mathbf{V_r^T.M.V_r}-\mathbf{W_r^T.M.W}_\mathrm{r}\right)-4\beta_\mathrm{r}\mathbf{V_r^T.M.W_r}+\mathbf{V_r^T.B.V_r}-\mathbf{W_r^T.B.W}_\mathrm{r};\\ &\mathbf{h}_\mathrm{r}=2\beta_\mathrm{r}\left(\mathbf{V_r^T.M.V_r}-\mathbf{W_r^T.M.W}_\mathrm{r}\right)-4\alpha_\mathrm{r}\mathbf{V_r^T.M.W_r}+\mathbf{2V_r^T.B.W}_\mathrm{r};\\ &\mathbf{G_r}=\mathbf{g_r.L_r}+\mathbf{h_r.R_r};\qquad \mathbf{L_r}=\mathbf{V_r.V_r^T}-\mathbf{W_r.W_r^T};\\ &\mathbf{H}_r=\mathbf{h}_r.\mathbf{L}_r-\mathbf{g}_r.\mathbf{R}_r;\qquad \mathbf{R}_r=\mathbf{V}_r.\mathbf{W}_r^T+\mathbf{W}_r.\mathbf{V}_r^T.\end{aligned} \tag{22}$$

3. Решение на диференциалните уравнения чрез метода на главните координати

При наличие на демпфиране в механичната система, преминаването от обобщени в главни координати [5] е възможно, когато в системата от диференциални уравнения (11) е изпълнено условието за пропорционалност:

$$\mathbf{B}=\alpha.\mathbf{M}+\gamma.\mathbf{C}\ , \tag{23}$$

при което тя се трансформира във вида:

$$\mathbf{M.\ddot{q}}+\left(\alpha.\mathbf{M}+\gamma.\mathbf{C}\right).\mathbf{\dot{q}}+\mathbf{C.q}=0 \tag{24}$$

Като се има предвид условието за преход от обобщени в главни координати, системата диференциални уравнения има вида:

$$\mathbf{V^T.M.V.\ddot{q}'}+\mathbf{V^T}.\left(\alpha\mathbf{M}+\gamma.\mathbf{C}\right).\mathbf{V.\dot{q}'}+\mathbf{V^T.C.V.q'}=0 \tag{25}$$

Като се използва ортогоналността на модалната матрица, за (24) се получава:

$$\mathbf{M_{q'}\ddot{q}'}+\mathbf{B_{q'}\dot{q}'}+\mathbf{C_{q'}.q'}=0\ , \tag{26}$$

където $\mathbf{M}_{\mathrm{q'}}=\mathbf{V^T.M.V};\quad \mathbf{B}_{\mathrm{q'}}=\mathbf{V^T}.\left(\alpha.\mathbf{M}+\gamma.\mathbf{C}\right).\mathbf{V};\quad \mathbf{C}_{\mathrm{q'}}=\mathbf{V^T.C.V}$ (27)

От (26) се получават 5 на брой независими диференциални уравнения от вида:

$$\mathbf{m_{ii}.\ddot{q}_i'}+\mathbf{b_{ii}.\dot{q}_i'}+\mathbf{c_{ii}.q_i'}=0\ , \tag{28}$$

което може да се запише по следния начин:

$$\mathbf{\ddot{q}_i'}+2\xi_{ii}.\boldsymbol{\omega}_\mathbf{i}.\mathbf{\dot{q}_i'}+\boldsymbol{\omega}_\mathbf{i}^\mathbf{2}.\mathbf{q_i'}=0\ , \tag{29}$$

където $\xi_{\mathrm{ii}}=\dfrac{\mathrm{c_{ii}}}{\mathrm{m_{ii}}\omega_\mathrm{i}}$

Ако системата притежава една собствена честота $\omega_k = 0$, и останалите $\omega_s \neq 0$, уравнения (29) добиват вида:

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathbf{q}}'_{\mathbf{k}} = 0 && \text{за} \quad \omega_k = 0 \\ &\ddot{\mathbf{q}}'_{\mathbf{s}} + 2\xi_s.\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{s}}.\dot{\mathbf{q}}'_{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{s}}.\mathbf{q}'_{\mathbf{s}} = 0 && \text{за} \quad \omega_s \neq 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Решенията на диференциалните уравнения (30) при начални условия $t = 0, \quad q'_i(0) = q'_{i0}, \quad \dot{\mathbf{q}}'_i(0) = \dot{\mathbf{q}}'_{i0}$, се търсят във вида:

$$\begin{aligned} &q'_k = q'_{k0} + \dot{q}'_{k0} t && \text{за} \quad \omega_\kappa = 0 \\ &q'_s = e^{\xi_{ii}\omega_s t} \left[\begin{matrix} q'_{s0} \cos \omega_{ds} t + \\ \left(\dfrac{1}{\omega_{ds}}\right) \left(\begin{matrix} q'_{s0} + \\ \xi_{ii}\omega_s q'_{s0} \sin \omega_{ds} t \end{matrix} \right) \end{matrix} \right], && \text{за} \quad \omega_c \neq 0 \end{aligned} \tag{31}$$

където $\omega_{ds} = \sqrt{1 - \xi_{ii}^2}$.

ИЗВОД

Създаден е динамичен модел, който характеризира свободните затихващи трептения на механична система с 5 степени на свобода. Определена е функцията за разсейване на енергията. Изведени са матрични диференциални уравнения на трептене и са дадени решения. Представено е второ решение с използване на метода на главните координати.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ангелов, И., Матрична теория на вибрациите в техниката, Авангард Прима, 2012.

[2] Ангелов, И., В. Славов, Сборник задачи Матрична механика. Динамика и трептения, София, „Авангард Прима", 2008.

[3] Ангелов, Ил., В. Славов, Ст. Читаков, Д. Кожухаров, Свободни пространствени нелинейни трептения на съчленено транспортно средство с едноосно ремарке, ТУ-Варна, сп. "Механика на машините" № 63, 2005, стр. 17-20.

[4] Ангелов Ил., Д. Желев, В. Бачев, В. Николов, Механо-математично матрично моделиране на пространствените свободни незатихващи трептения на мотокар, сп. „Механика на машините" кн.99, 2012 г.

[5] Amiroche F. Computer – Aided design and manufacturing. Prentice Hall, Englewood Clifs, New Jersy, 1993.

За контакти:

Доц. д-р инж. Стойчо Стоев, Катедра „Машиностроене и уредостроене", Технически университет - София, филиал Пловдив, тел.: (+359) 895-587 517, e-mail: sto_sto46@abv.bg ;

Гл. ас. инж. Валентин Бачев, Катедра „Машиностроене и уредостроене" Технически университет - София, филиал Пловдив, тел.: (+359) 895-587 381, e-mail: abc4@abv.bg ;

Маг. инж. Чавдар Ангелов, докторант, Технически университет - София, тел.: (+359) 888-255 902, e-mail: il.angelov@abv.bg ;

Гл. ас. инж. Деян Желев, Катедра „Механика", Технически университет - София, филиал Пловдив, тел.: (+359) 892-231 390, e-mail: hidro_eood.bg .

Докладът е рецензиран.