Приложение на компютърни графични методи за решаване на системи уравнения при въвеждане на функции на Коб-Дъглас при студенти-икономисти

Асен Велчев

An Application of Computer Graphical Methods for Solving Systems of Equations in Introducing Economic Students with Cobb-Douglas functions: *The paper considers a possibility to support the introduction of students of economics to Cobb-Douglas function by computer methods for graphical solving of systems of equations. Computer Algebra Systems may (CAS) be used for this goal. Here is used Derive 6.1. Algebraic calculations will be very difficult and boring in this case without electronic calculator or computing technology.*

Key words: *Graphical solving, Computer Algebra System (CAS), Model, Cobb-Douglas function.*

ВЪВЕДЕНИЕ

За студенти от приложни области на математиката е полезно да боравят с лекота с графики и графични методи за решаване на системи нелинейни уравнения. Така се избягват изчислителни и други трудности, характерни при "ръчна" работа, а графиките интуитивно се разбират в значителна степен и дават обзорна информация за поведението на дадени функции и решения. Системите за компютърна алгебра могат да дадат и аналитично, и числено решение, но това може да бъде истински полезно за проверка и по-точен резултат, след като задачата е решена графично. За нематематици ще е трудно да обхванат "цялата картина" само по формула или числен резултат. Т. нар. функция на Коб-Дъглас, която разглеждаме, е с две променливи с дробни степенни показатели. Оптималното икономическо решение се получава от система от линейно и степенно уравнение на линия на ниво за упоменатата функция [2]. Още една трудност в системата, освен дробните степени, е параметърът, от който зависи линията на ниво. Давам методически бележки как да се използва CAS (в нашия случай Derive 6.1) в занятие по темата.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Възникването на теорията на производствените функции се отнася към 1928 г., когато се появява статията на американските учени Чарлз Коб и Пол Дъглас, в която за първи път е въведена функция, изразяваща зависимостта между обема на производствени разходи за основни капиталовложения (сгради, оборудване и пр) *K*, разходите за труд *L*, общата производителност *A* на предприятието и обема продукция *Y*. Тя има вида

$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, където $A > 0, 0 < \alpha < 1$.

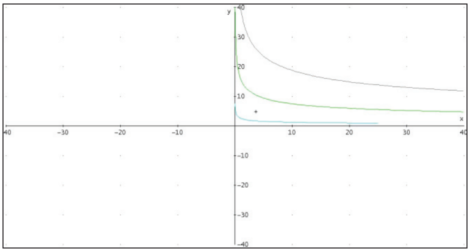
и се нарича функция на Коб-Дъглас [1], линейно-хомогенна в случая. Тук α и 1-α са коефициенти на еластичност, показващи процентното изменение на размера на продукцията при увеличение на *K/L* с единица. Чрез статистическите данни за САЩ за периода 1899-1922 г., с помощта на метода на най-малките квадрати, авторите получават функцията

$Y = 1{,}01.K^{0,25}L^{0,75}$.

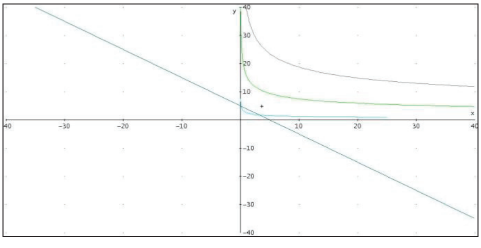
Линия на ниво, за $c > 0$, е множеството от точки в равнината с неотрицателни координати, удовлетворяващи равенството $F(K, L) = c$ т.е. за функцията на Коб-Дъглас линия на ниво (Фиг. 1) се задава с уравнението

$AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = c$.

На студентите трябва да се изяснят детайлно следните неща: Точките (K, L) от една линия на ниво съответстват на една и съща продукция, получена при различни разходи. Трябва да се предпочете онази точка от линията на ниво, която е с минимални разходи (те са сумата от координатите й). В интерес на производителя е да произведе максимум продукция при даден наличен бюджет, т.е. последният да бъде *изцяло вложен*. Линията на бюджетните ограничения $K+L=C$ (**Фиг. 2**) произлиза от условието $K+L\leq C$ (сумарният вложен капитал е винаги по-малък или равен на брутния наличен капитал *С* на производителя) [2]. Обща точка на линия на ниво с бюджетната права означава вложен целия бюджет за обем продукция, характерен за тази линия на ниво. От всички линии на ниво, имащи общи точки с правата $K+L=C$, трябва да се избере онази, за която е максимална стойността на *с*. Линиите на ниво, пресичащи правата в две точки, се получават за по-малки стойности на *с*. Тази, която има една обща точка с правата, е за оптималната стойност на *с*, а при по-високи стойности на *с* - нямат общи точки, т.е. наличният капитал не е достатъчен за толкова производство, дори при най-благоприятно му разпределение между разходи за труд и основни фондове. За целта е нужно всичко това да се дискутира с обучаемите, а методическите единици да бъдат подбрани много добре. При запознаването им с някой конкретен пакет CAS (в случая Derive 6.1) бих препоръчал насърчаване на евристичните им способности, като им се уясняват от математическа гледна точка различните опции в някои менюта, с оглед да имат ясно пространство за ориентация. Всички видове софтуери са сравнително еднотипни, подобни и интуитивни, и по тази причина не намирам за особено удачен стремежа да им се дава да ползват/запаметяват алгоритми за изчертаване, пресмятане и т.н. Всяко нещо, което се преподава, от малкото до голямото, би било добре да развива търсещото мислене. Когато нещо не достига на студентите, за да реализират конкретна процедура, може да им се укаже чрез въпрос, упътване или наготово, в зависимост какво точно е и какви са нагласите и стратегиите им на учене.



Фиг. 1. Линии на ниво за функцията на Коб-Дъглас $AK^{\alpha}L^{1-\alpha}=c$ при *А=1*, $\alpha=0{,}25$ и $c=2;\ 8;\ 16$. Тук *К* се отчита по оста *х*, а *L* - по *у*

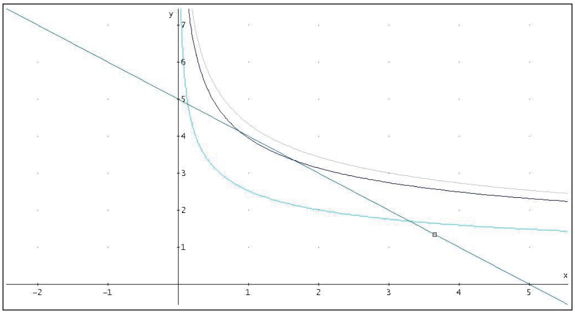


Фиг. 2. Линиите на ниво от **Фиг. 1**, заедно с правата на бюджетните ограничения *К + L = 5*, т.е. *х + у = 5*

Ще предполагаме, че студентите са усвоили що е еластичност на функция, икономическия смисъл на производствените функции и са на семинарно занятие по математика в компютърна зала, върху функцията на Коб-Дъглас. Преди още да им е дадена задача за намиране на оптимално решение, е добре да се въведат линии на ниво, като те изчертаят такива (**Фиг. 1**), а после - бюджетната права. Добре е да им се изясни, че целият триъгълник с върхове отрезите на правата и началото на координатната система е допустима област за разходите. След това намирам за добре да се пристъпи към самата задача. Тук тя (виж легендата под **Фиг. 1** и **2**) е:

$$\left| \begin{array}{l} c = K^{0,25} L^{0,75} \\ K + L = 5 \end{array} \right.$$

Тук, за по-просто, без съществена загуба на точност, A=1, вместо 1,01. И така, нужно е да се намери линия на ниво, допираща се до правата $K + L = C$. Координатите на допирната точка са оптималните стойности на *K* и *L*. Това със съвременна CAS може да стане доста точно, като студентите правят последователни приближения, което би било интригуващо за немалко от тях. Виждайки, че *c=2* (синята линия на **Фиг. 2**) е най-близо до правата, но под нея, те биха могли (да бъдат подсетени) да дадат на *c* стойност 3 (**Фиг. 3**). Виждайки, че 3 е много, но че съответната (сивата) линия на ниво е по-близо до правата, могат да дадат стойност напр. *c=2,8* (тъмната междинна линия на **Фиг. 3**).

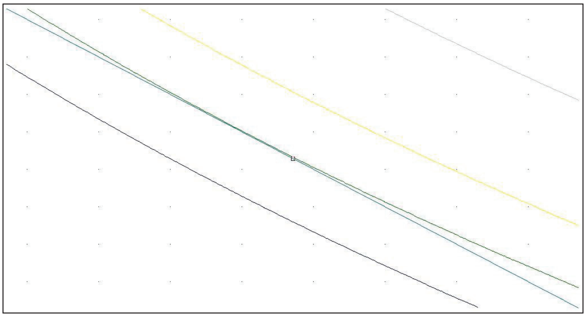


Фиг. 3. Линии на ниво за функцията на Коб-Дъглас $AK^{\alpha} L^{1-\alpha} = c$ при *A=1*, $\alpha = 0,25$ и $c = 2;\quad 2.8;\quad 3$

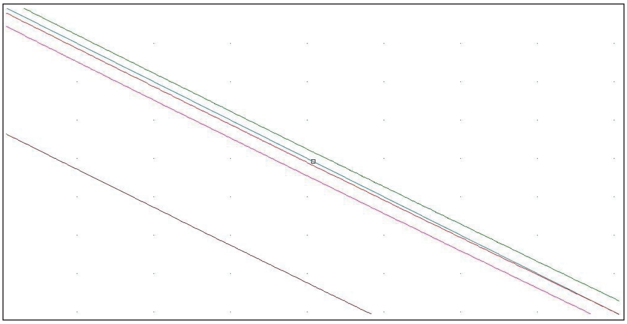
При увеличен мащаб, могат да добавят криви за $c = 2.85;\quad 2.9$ (**Фиг. 4**). Очевидно за първата стойност на *c* решението е най-близо до оптимум. Остава да се намери още по-добро приближение (**Фиг. 5**) и общата точка на съответната крива и правата. Съвсем не е малка точност до втория знак (**Фиг. 5**), а CAS имат много повече възможности. Сега вече могат да решат системата и числено, и да сравнят резултата. С процедурата Solve, при *c = 2.84*, се получава неприятно решение (ок. 2 страници). След нея, с процедурата Simplify, се получават следните две решения:

[x = 1.318279738, y = 3.681720261] и [x = 1.183339013, y = 3.816660986].

С търсене на още по-добро приближение, със стойности на *c > 2.84*, може да се открие със сравнително голяма точност онази от тях, за която ще се получи точно едно решение. Видяли и осмислили веднъж принципа чрез графиките, студентите ще могат да се ориентират за тези приближения без недоумение и затруднение. На това занятие може би е целесъобразно да осмислят в детайли тази производствена функция, имайки дотогава само по-обща идея за икономическия ѝ смисъл. *Детайли могат да се осмислят в процес на целенасочена активна работа по задание*.



Фиг. 4. Линии на ниво за $c = 2.8;\quad 2.85;\quad 2.9;\quad 3$; курсор на правата *x* + *y* = *5*



Фиг. 5. Линии на ниво при $Y = 2.84;\quad 2.848;\quad 2.849;\quad 2.85$ при още по-голям мащаб

Описание на алгоритъма за работа с Derive 6.1, с цел да не срещне някой читател и най-малкото непознато нещо, което би провалило начинанието, дори всичко друго да би съобразил. Как се изчертава крива? С пускането на Derive 6.1 (има безплатна пробна версия за 30 дни), от лентата с бутони, която е непосредствено под лентата с падащите менюта File, Edit, Insert ..., се избира графичен режим от бутон с изобразена на него част от синусоида в координатна система. Бутоните в тази лента са с малки размери - под 1 кв.см. На екрана се появява координатна система, ако няма задействана друга опция от предно пускане. Ако има такава, връщането на стандартния изглед става с бутон с нарисувана кординатна система с начало в центъра на бутона. Когато курсора се постави над бутона, без да се натиска той, се появява подсказващ текст "Center on origin". Този бутон се натиска. В командния ред долу се изписва x^(1/4)*y^(3/4)=3, задължително се натиска клавиша Enter, а после, за изчертаване - бутона със синусоидата в лентата с бутони. Алгоритъмът се повтаря за другите криви, като само се променя константата в командния ред, после Enter и т.н. След натискането на Enter трябва въведената формула да се маркира в синьо. Тогава може да се изчертава с бутона за графика. Различен мащаб се задава чрез няколко различни бутона в лентата с бутони. Има опции за свиване (zoom out), т.е. в обсега на екрана попада все по-голяма част от координатната равнина, и съответно - разтягане (zoom in). Има бутони за промяна на мащаба само по една от осите. Диапазонът на Derive 6.1 и на другите CAS е достатъчно голям. С най-десния бутон в лентата може да се премине в алгебричен прозорец, а от него - в дву или триизмерен чертеж.

Система се решава по следния начин: минава се в алгебричен прозорец. От падащото меню Solve се избира опцията System или Ctrl+Shift+Y. Излиза прозорец за въвеждане брой на уравнения/неравенства в системата. Избира се 2 в случая и се дава ОК. Появява се диалогов прозорец с два реда за въвеждане в тях на уравненията, а отдолу под тях опции ОК, Solve и Cancel. Въвеждат се уравненията и се избира Solve. В алгебричния прозорец се появява решението, готово маркирано. От падащите менюта се избира меню Simplify (Опрости), т.к. в случая решението е "километрично", с опция Approximate (Приближение). Появява се диалогов прозорец с колко знака след десетичната запетая да бъде точността. Ако са 10 знака, което дори е ненужно голяма точност за икономиката, се получава даденото по-горе решение. При посочване на десетичните знаци в поле на диалоговия прозорец, се натиска бутон ОК или Approximate под това поле (клетка) и отговорът се появява.

Практически приложения. В икономическите изследвания производствени функции се използват при вземане на управленски решения предимно в големи компании, държави, региони и др., т.е., предимно в макроикономиката. Практическите ситуации са по-сложни и многостранни от описаната класическа ситуация при функцията на Коб-Дъглас. При икономически прогнози, например, производителността *A* не е константа [3], а функция на времето, т.к. технологичният напредък ѝ влияе. Може новите технологии да са предимно капиталоспестяващи (прогрес по Харод) или предимно увеличаващи производителността на труда (прогрес по Солоу), или и двете (неутрален технически прогрес по Хикс) [3]. Същевременно, А може да зависи от избора на технология на производство, т.е. да бъде функция с ограничено множество различни стойности (според броя алтернативи).

Между вложените капитал *K* и труд *L* има известна взаимо-заменяемост. Увеличението на вложения капитал *K* може да намали разходите за труд *L*, например. Важна е еластичността на тази заменяемост, за да се види докога това е оправдано. Въпросната еластичност може да бъде променлива с времето, което допълнително би усложнило функцията. Определянето на еластичността става чрез обосновани хипотези и статистически методи за тяхната проверка [3]. Аргумент в полза на функцията на Коб-Дъглас е, че е по-опростена и с малък брой параметри за оценка [3]. Тя е подходяща при средноголеми производства с относителна устойчивост. *Тя именно се счита за най-удачна от изследователите при характеризиране на БВП на Република България [3], което я прави твърде важна за бъдещите ни икономисти*. При *m* фактора, влияещи на производствения процес, функцията на Коб-Дъглас се модифицира така:

$Y = AF_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \ldots F_m^{\alpha_m}$, където F_i са факторите, а α_i - еластичностите им.

При наличие на повече променливи не може да се ползва графичен метод за решаване. Ако са три, може да се излезе в пространството, което е възможно с Derive и други CAS, и е желателно да се разгледа в обучението, след като студентите са овладяли предложения тук материал. За тези и други възможни случаи се използват модифицирани производствени функции, обикновено усложнени спрямо Коб-Дъгласовата. Последната може да служи като междинно стъпало в обучението, а и има директни приложения, поради което е желателно овладяването ѝ в бакалавърските програми. Желателно е работене по проекти, свързани с творчески изследвания, съставяне на математически модели с производствени функции, решаването им и тълкуване на резултатите. Само при тези условия, според мен, студентите може истински да придобият цялостен поглед върху приложението им и всички свързани с него детайли. За целта обаче трябва описаната проблемна ситуация да е псевдо-производствена, с някои идеализирани параметри. Обичайна практика е при реалните икономически изследвания да се ползват комбинации от по няколко производствени функции, чиято състоятелност, приложимост и надеждност се определят въз основа на определени критерии и оценки [3], т.е., процесът на изследване е многоетапен, т.е. - подходящ за работа по проекти. Възникват и проблемни ситуации - например не всички съставени производствени функции позволяват параметрите им да се изчисляват статистически по метода на най-малките квадрати, а други методи не винаги дават валидни резултати; не всички фактори, влияещи производството са измерими и пр., и пр.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ръководителите на семинарни упражнения по икономически дисциплини и математика биха могли, ползвайки като основа дадените тук предложения и възможности, да разработват разнообразни икономически задачи с цел по-многостранно разглеждане на функцията на Коб-Дъглас и нейни приложения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Cobb%E2%80%93Douglas_production_function

[2] Simon,C., L.Blume. Mathematics for Economists, NY., 1994, 5-8.

[3] Петков, Пл. Алгоритъм за иконометрична оценка на агрегираната производствена функция с трансцендентната логаритмична (транслог) апроксимация http://www.uni-svishtov.bg/dialog/2009/1.09.PP.pdf

За контакти:

ас. Асен Велчев, Катедра "Математика" при Факултет "Приложна информатика и статистика", Университет за Национално и Световно Стопанство, Студентски град, София 1700, бул. “8 декември”, e-mail: asen_v@abv.bg.

Докладът е рецензиран.