

Компресия на цифрови изображения с ниски загуби

Васил Колев

Abstract: Approximation of the $m \times n$ matrices by using far fewer entries than in the original matrix is presented. Using the rank of matrix we decomposition of different type images for image compression. With this approximation more than 90% compression ratio of astronomical images from scanned plates is obtained.

Key words: Astronomical image compression, matrix rank approximation,

ВЪВЕДЕНИЕ

Необходимостта от минимизация на цифрова информация при запаметяване и претърсване на цифрови изображения нараства в съвременния свят. Разлагането по сингулярни стойности (РСС) [1] е инструмент за минимизация на данни. Приложения в астрономията могат да бъдат намерени в [2], където е използван за описване спектъра като от инфрачервена карта на NGC7023 като физическа суперпозиция на четири компонента. Чрез сингулярните стойности могат да се определят сигнала и шумовите подпространства. РСС се прилага за намиране на слаби звезди, премахване на шум, непрекъснато извличане на спектралните криви в радио-астрономически изображения, автоматична класификация на изображения и др.

В настоящата работа ще бъдат разгледани изображение от сканирани астрономически плаки които образуват *.fits format файлове с големина >400Mb. Следователно, съхраняването им изисква голямо пространство в компютърните системи. За да се намали големината на изображенията съществуват различни методи за компресия (свиване). Такъв метод е РСС, който е много полезен за анализ и визуализация на информация. В линейната алгебра РСС познат като метод за разлагане на матрици, използван за обработка на информация, компресия на изображения [3, 4], обезшумяване на изображения или обработка на изображение с воден знак и др. РСС е използван като мярка за качество на изображението при различни типове изкривявания в изображението [5].

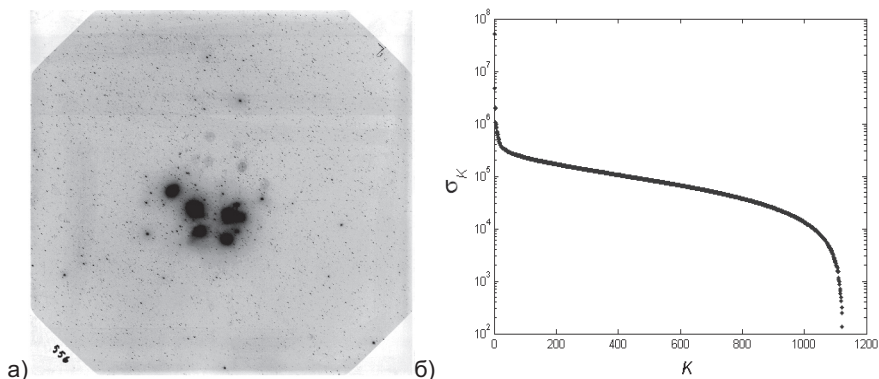
Разлагането по сингулярни стойности на матрица A е:

$$A = U\Sigma V^T,$$

като са получени, унитарната матрица U , диагоналната матрица Σ състояща се от сингулярните стойности (квадратен корен на собствените стойности) на A , и матрицата V^T .

Има няколко важни свойства това разложение на матрица:

- РСС е устойчиво - малки смущения в матрицата A са свързани с малки смущения в матрицата от сингулярните стойности Σ и обратно;
- Ранга на матрицата A е равен на броя ненулеви сингулярни стойности;
- Диагоналността на матрицата Σ , позволява определяне ранга на матрица A близко до ранга на изродена матрица. С това може да се извършва апроксимация на матрицата A с матрица от нисък ранг A_k ;
- Сингулярните стойности са уникални, обаче матриците U и V не са;
- От ковариационната матрица $A^T A = V\Sigma^T \Sigma V^T$, следва че матрицата V диагонализира $A^T A$ и се състои от десните сингулярни стойности на A ;
- От ковариационната матрица $AA^T = U\Sigma^T \Sigma U^T$, следва че матрицата U диагонализира AA^T и се състои от левите сингулярни стойности на A ;



Фиг. 1 Астрономическо изображение на сканирана фотографска плака M45-556p.fits; а) Сканирано изображение от fits файла; б) Сингулярни стойности σ_j , $j = 1, 2, \dots, 5$ на изображението

Целта на статията е разглеждане метода на разлагане по сингулярни стойности (РСС) приложен върху няколко вида цифрови изображения и главно астрономически изображения от сканирани фотографски плаки.

АПРОКСИМАЦИЯ С МАТРИЦА ОТ НИСЪК РАНГ

Нека съществува правоъгълна $m \times n$ матрица A , където $m \geq n$. Тогава РСС на матрицата A е произведението от $m \times n$ матрици:

$$A = U \Sigma V^T = [\sigma_1 u_1 \quad \sigma_2 u_2 \quad \dots \quad \sigma_n u_n] [v_1^T \quad v_2^T \quad \dots \quad v_n^T]^T = \sum_{j=1}^n \sigma_j u_j v_j^T, \quad (1)$$

където U е $m \times n$ ортогонална матрица, V^T - $n \times n$ ортогонална матрица, и Σ - диагонална матрица състояща се от сингулярните стойности σ_j . От Фиг.1 е очевидно бързо намаляване на сингулярните стойности за $j < 50$. Ето защо ние може да извършим апроксимация на матрицата A с матрица от нисък ранг.

Нека някакъв вектор $x \in \mathbb{C}^n$. Произведението му с матрица A допуска разлагането:

$$Ax = \sum_{j=1}^n (\sigma_j u_j v_j^T) x = \sum_{j=1}^n (\sigma_j u_j v) u_j \quad (2)$$

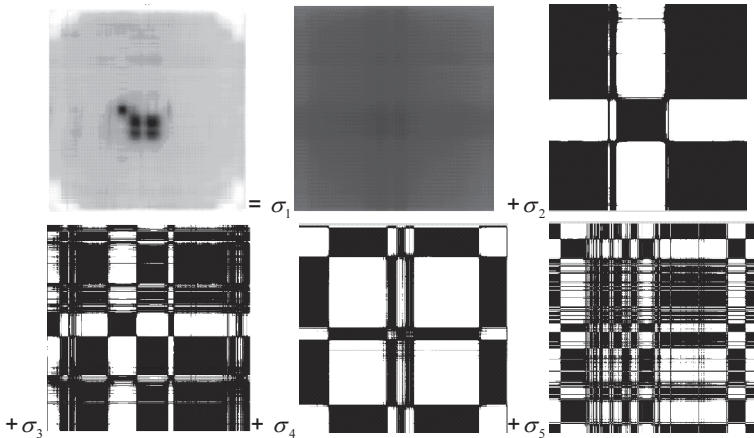
тъй като произведението $v_j^T x$ е скалар. Произведението Ax е линейна комбинация на левите сингулярни стойности $\{u_j\}$. Ако всички стойности $\sigma_j \neq 0$ ранг на матрицата A е $n = r$, т.е. $\sigma_r \neq 0$ и $\sigma_{r+1} = 0$ и произведението (2) е еквивалентно на:

$$Ax = \sum_{j=1}^r (\sigma_j v_j^T x) u_j \quad (3)$$

Следователно, апроксимацията на матрицата A може да се изрази чрез непълните частни суми за ранг $k \leq r$:

$$A_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j u_j v_j^T. \quad (4)$$

Линейната независимост на векторите $\{u_1, \dots, u_k\}$ гарантира $\text{rang}(A_k) = k$ с тегловни $m \times n$ матрици $A_j^w = u_j v_j^T$.



Фиг.2 Апроксимирано изображение състоящо се от първите 5 сингулярни стойности ($\sigma_1 \dots \sigma_5$) умножени с тегловни матрици на разлагане $\mathbf{A}_j^w = \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T$;

Пример 1:

Разлагане на астрономическото изображение от Фиг.1 за $j = 5$ е израз:

$$\mathbf{A}_5 = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \dots + \sigma_5 \mathbf{u}_5 \mathbf{v}_5^T = \sigma_1 \mathbf{A}_1^w + \sigma_2 \mathbf{A}_2^w + \dots + \sigma_5 \mathbf{A}_5^w \quad (5)$$

със сингулярни стойности

$\sigma_1 = 794.3, \sigma_2 = 71.841, \sigma_3 = 30338, \sigma_4 = 29.161, \sigma_5 = 16.107$ показани на фиг.2.

Частните произведения $\sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T$ с малки σ_j допринасят много малко информация за оригиналната матрица поради линейното намаляване (за $50 \leq j \leq 850$) на сингулярните стойности (Фиг. 1б).

ПРИЛОЖЕНИЯ НА АПРОКСИМАЦИЯ С МАТРИЦА ОТ НИСЪК РАНГ ЗА КОМПРЕСИЯ НА ИЗОБРАЖЕНИЯ С НИСКИ ЗАГУБИ

Цифровите изображения са правоъгълни матрици съдържащи стойността за цветовете на пикселите. Обикновено такива матрици могат да бъдат апроксимирани чрез матрици от нисък ранг. Това позволява вместо запамятаваме на $m \times n$ матрица \mathbf{A} , матрици с $k(m+n+1)$ стойности в сумата:

$$\mathbf{A}_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \quad (6)$$

Тъй като при $k \ll (m, n)$ се подобрява значително нивото на компресия (НК), апроксимацията на матрицата \mathbf{A} може да бъде представена само с първите няколко суми \mathbf{A}_k . НК се изчислява чрез формулата:

$$\text{НК} = \left(1 - \frac{k(m+n+1)}{m \times n} \right) \times 100, \% \quad (7)$$






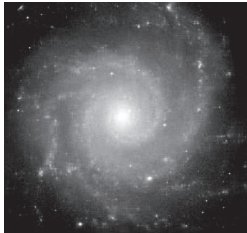

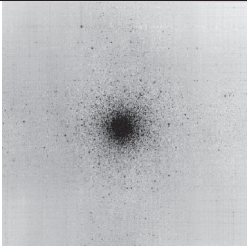
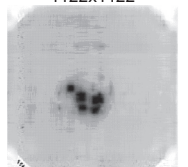
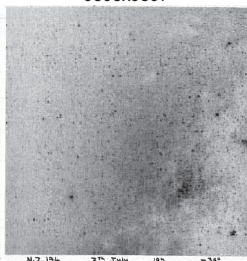
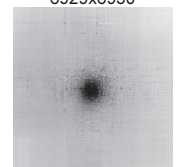
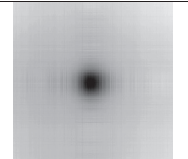
Пример 2:

Изчисляване на НК за сканираната фотографска плака от фиг.1 за $k = 40$ е:

$$\text{НК} = \left(1 - \frac{40(1122 + 1122 + 1)}{1122 \times 1122} \right) \times 100 = 0.928667 \times 100 \approx 93 \%$$

В Табл.1 се показани нивата на компресия получени при различен ранг k за различна големина и тип изображения.

Таблица 1

Големина и име на изображението	k	НК	Големина и име на изображението	k	НК
256x256 	12	90.61		50	60.86
304x442 	10	94.44		10	94.39
302x436 	10	94.39	2540x2700 	50	96.18
512x512 	12	96.31		50	98.56
1122x1122 	12	97.86	9898x9897 	50	98.99
6929x6930 	12	99.65			
	2	99.94			

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чрез използване единствено на първите няколко сингулярни стойности и съответните стълбове от матриците U , V е възпроизведено оригиналното цифрово изображение (Табл.1). Можем за заключем че, с намаляване на НК се наблюдават повече детайли в изображението и обратно. Тъй като РСС е по-бърз от обработката с Винеров филтър, метода се използва за премахване на космически шумове в астрономически изображенията от сканирани фотографски плаки. Апроксимацията с матрици от нисък ранг A_k , е много ефективна тъй като най-важните обекти са концентрирани винаги в или около центъра на фотографската плака. Обектите по краищата на плаката, т.е. с малки звездни величини, могат да бъдат открити от астрономическите каталози. Нещо повече, само с 2 сингулярни стойности и съответните им частни суми, т.е. $A_2 = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T$, Табл.1, се открива кълбовидния кълстер М10 в съзвездието Змиеносец. С 12 сингулярни стойности можем да определим някои по далечни обекти от същата плака. Резултата на фиг. 2 показва че с 5 сингулярни стойности определяме точно местоположението на кълстера Плеяди М45, или седемте сестри.

Тези резултати са в сила при наличие на малко обекти или за разпръснати обекти по цялото изображения. При тях е постигнат НК повече от 95%, който зависи от размера и вида на изображението.

С този метод на представяне на астрономически изображения от сканирани фотографски плаки намаляваме значително изискванията на компютърните системи за тяхното съхраняване. В Web приложенията, за предаване/приемане оригиналното сканирано изображение без загуби, може да се построи лесно йерархичен пирамидален алгоритъм.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Andrews C., Patterson, L., SVD image coding, IEEE Transactions on Communications, pp. 425 - 432, 1976.
- [2] Boissel P, Joblin C., and Pernot P, "Singular value decomposition: A tool to separate elementary contributions in ISOCAM spectral maps", A&A, pp. L15 - L18, 2001.
- [3] Demmel J. W., Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, 1997.
- [4] Nievergelt Y., Schmidt - Mirsky matrix approximation with linearly constrained singular values, Linear Algebra and Application, pp.207 - 219, 1997.
- [5] Shnayderman A., Gusev A., Eskicioglu A., A Multidimensional Image Quality Measure Using SVD, Proceedings of the SPIE Image Quality and System Performance Conference, pp. 82 - 92, 2004.

За контакти: Васил Колев, Институт по Информационни и Комуникационни Технологии, БАН, e-mail: kolev_acad@abv.bg

Докладът е рецензиран.