Фамилия периодични решения на полулинейни ОДУ от четвърти ред, получени със симетрична теорема на хребета

Ели П. Калчева, Миглена Н. Колева, Юлия В. Чапарова

Abstract: Multiple Periodic Solutions of Fourth-Order Semilinear ODE obtained by Symmetric Mountain Pass Theorem: *In this work we consider fourth order semilinear PDE, arising in population dynamics and concerning spatial patterns formation. First, using variational method, we present some analytical results for existence of infnitely many stationary periodic solutions. Next we use a fast numerical algorithm developed in our previous work [1] in order to obtain some numerical solutions.*

Key words: *Multiple Periodic Solutions, Fourth-Order Semilinear ODE, Symmetric Mountain Pass Theorem*

ВЪВЕДЕНИЕ

През 1988 година Dee & Saarloos [2] и по-късно Zimmermann [9] въвеждат обобщение на класическото уавнение на Фишер-Колмогоров за изучаване на фазови преходи в близост до особена точка (вж. също монографията на Узунов [8]). Това уравнение е полулинейно параболично уравнение от четвърти ред и се явява обобщение на моделното уравнение ,предложено от Колмогоров , Петровски и Пискунов през 1936 година и независимо от тях Фишер през 1937 година.

В тази работа изучаваме стационарните периодични решения на уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,u)$$

където m е положителна константа, а f е дадена непрекъсната функция. В моделното уравнение обикновено f съдържа някакви степени на u. Стационарни решения на автономното уравнение при $f=u^3-u$ са получени в множество работи на Peletier и негови сътрудници (вж. монографията [5] и посочената там литература) и на Sanchez [3]. В работи на Терзиян, Гюлов и Чапарова [4], [7] са намерени стационарни периодични и хомоклинични реешения в неавтономния случай.

В тази статия разглеждаме неавтономното полулинейно ОДУ от четвърти ред

$$u^{(4)}-mu''+a(x)u|u|^{p-2}-b(x)u|u|^{q-2}=0, \qquad (1)$$

където $a(x)$ и $b(x)$ са положителни, непрекъснати $2L$-периодични функции и $m>0$, $p,q>1$. Предполагаме, че функциите $a(x)$ и $b(x)$ са четни, т.е. $a(-x)=a(x), b(-x)=b(x)$ за всяко x. Разглеждаме граничната задача за (1) с гранични условия

$$u(0)=u''(0)=u(L)=u''(L)=0. \qquad (2)$$

Поради периодичността и симетрията на коефициентите, $2L$-периодични решения на уравнението (1) могат да се получат от нечетното продължение на решенията на граничната задача (1)-(2).

Означаваме с X Соболевото пространство $H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)$. Задачата (1)-(2) има вариационна структура и слабите й решения, т. е. функциите $u\in X$, за които

$$\int_0^L [u''v''+mu'v'+a(x)u|u|^{p-2}v-b(x)u|u|^{q-2}v]\,dx=0 \quad \text{за}\ \forall v\in X,$$

се явяват критични точки на функционала

$$J(u)=\int_0^L\left[\frac{1}{2}u''^2+\frac{m}{2}u'^2+\frac{1}{p}a(x)|u|^p-\frac{1}{q}b(x)|u|^q\right]dx.$$

(Да отбележим, че ако $u\in X$ е слабо решение на (1)-(2), такова е и $-u$). Може да се покаже, както в $[7]$, че слабите решения на $(1)-(2)$ са класически решения $u\in C^4[0,L]$.

За получаване критичните точки на функционала J използваме следващата симетрична теорема за хребета (Symmetric Mountain –Pass Theorem), която дължим на Рабинович [6] .

Теорема 1. *Нека X е безкрайномерно Хилбертово пространство и (X_n) е редица от подпространства на X, такава, че* $\dim X_n=n$,

$$X_1\subset X_2\subset ...\subset X_n\subset X\ ,\ \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n}=X\,.$$

Нека $J\in C^1(X,R)$ е четен функционал, $J(0)=0$ и J удовлетворява условието Пале-Смейл (PS) . Предполагаме, че

(j) *съществуват константи* $\rho,\alpha>0$, *такива,че* $J\Big|_{\partial B_\rho}\geq\alpha$, *и*

(jj) *за* $\forall n$ *съществува* $R_n>0$, *така че* $J\leq 0$ *на* $X_n\setminus B_{R_n}$.

Тогава J притежава безброй много двойки критични точки с неограничена редица от критични стойности.

Основният теоретичен резултат е доказан в .следващия параграф.

Теорема 2. *Предполагаме, че функциите $a(x)$ и $b(x)$ са положителни, четни, непрекъснати, $2L$-периодични функции и $m>0$, $1<p<q$, $q>2$. Тогава задача $(1)-(2)$ има безброй много двойки решения $(u_n\ ,-u_n)$.*

В Параграф 3 са представени някои числени експерименти, получени с алгоритъм, разработен в предишна работа на авторите [1].

АНАЛИТИЧНИ РЕЗУЛТАТИ

Твърдение 1. Нека $u\in C^4[0,L]$ е решение на граничната задача $(1)-(2)$. Нека $\bar{u}$ е нечетното продължение на u в $[-L,L]$,

$$\bar{u}(x)=\begin{cases} u(x), & x\in[0,L],\\ -u(-x), & x\in[-L,0].\end{cases}$$

Тогава $\bar{u}$ е класическо решение на уравнение (1) в интервала $[-L,L]$.

Доказателство. За $x\in[0,L]$ твърдението е вярно, защото $\bar{u}(x)=u(x)$, а $u(x)$ е решение на задача $(1)-(2)$. За $x\in[-L,0]$, замествайки в уравнението, получаваме

$$\bar{u}^{(4)} - m\bar{u}'' + a(x)\bar{u}|\bar{u}|^{p-2} - b(x)\bar{u}|\bar{u}|^{q-2}$$
$$= [-u(-x)]^{(4)} - m[-u(-x)]'' + a(x)[-u(-x)]|-u(-x)|^{p-2}$$
$$- b(x)[-u(-x)]|-u(-x)|^{q-2}$$
$$= -\Big[u^{(4)}(-x) - mu''(-x) + a(x)u(-x)|u(-x)|^{p-2}$$
$$- b(x)u(-x)|u(-x)|^{q-2}\ \Big] = 0 .$$

Тъй като $a(x)$ и $b(x)$ са четни функции , то наистина $\bar{u}(x)$ удовлетворява уравнение (1).

Освен това решението $u(x)$ има непрекъсната производна в 0 до четвърти ред, с което доказателството завършва. ☺

Твърдение 2. Функционалът $J(u)$ е диференцируем по Фреше в X и

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_0^L \Big[u''v'' + mu'v' + a(x)u|u|^{p-2} - b(x)u|u|^{q-2}\Big]dx \quad \forall v \in X .$$

Въвеждаме за удобство еквивалентна норма в X

$$\|u\| = \int_0^L \Big[(u'')^2 + m(u')^2\Big]^{1/2} dx \ .$$

Следва доказателство на нашият главен резултат.

Доказателство на Теорема 2. Като начало да проверим, че функционалът J удовлетворява **условието на Пале-Смейл** (PS) .

Предполагаме, че редицата (u_n) е (PS)-редица в X , т.е. редицата $(J(u_n))$ е ограничена и $J'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Ще покажем, че редицата (u_n) е ограничена в X .Допускаме противното, т.е. (u_n) не е ограничена в X . Тогава

$$J(u_n) - \frac{1}{q}\langle J'(u_n), u_n\rangle \ = \int_0^L \left[\frac{1}{2}u_n''^2 + \frac{m}{2}u_n'^2 + \frac{1}{p}a(x)|u_n|^p - \frac{1}{q}b(x)|u_n|^q\right]dx$$

$$- \frac{1}{q}\int_0^L \Big[u_n''u_n'' + mu_n'u_n' + a(x)u_n|u_n|^{p-2}u_n - b(x)u_n|u_n|^{q-2}u_n\Big]dx$$

$$= \int_0^L \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\left((u_n'')^2 + m(u_n')^2\right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)a(x)|u_n|^p\right]dx \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|^2 .$$

Така

$$\frac{J(u_n)}{\|u_n\|^2} - \frac{1}{q}\frac{\|J'(u_n)\|}{\|u_n\|} \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) > 0 , \qquad (3)$$

защото $q > 2$.

В неравенство (3) вземаме $n \to \infty$ и получаваме противоречие, дължащо се на допускането. Следователно, редицата (u_n) е ограничена в X и така съществува слабо сходяща подредица, която отбелязваме пак с (u_n). Нека $u \in X$ е граничната функция.

От компактното влагане (Embedding Theorem) на X в $C^1[0,L]$ следва ,че редицата $u_n \to u$ в $C^1[0,L]$. От равенствата

$$\langle J'(u_n), u_n \rangle$$
$$= \int_0^L \left[u_n'' u_n'' + m u_n' u_n' + a(x) u_n |u_n|^{p-2} u_n - b(x) u_n |u_n|^{q-2} u_n \right] dx$$
$$= \int_0^L \left[u_n''^2 + m u_n'^2 \right] dx + \int_0^L \left[a(x)|u_n|^p - b(x)|u_n|^q \right] dx = \|u_n\|^2 + \int_0^L \left[a(x)|u_n|^p - b(x)|u_n|^q \right] dx$$

и

$$\langle J'(u_n), u \rangle$$
$$= \int_0^L \left[u_n'' u'' + m u_n' u' + a(x) u_n |u_n|^{p-2} u - b(x) u_n |u_n|^{q-2} u \right] dx$$
$$= \langle u_n, u \rangle + \int_0^L \left[a(x) u_n |u_n|^{p-2} u - b(x) u_n |u_n|^{q-2} u \right] dx$$

следва ,че при $n \to \infty$ $\|u_n\| \to \|u\|$ и $u_n \to u$ в X. С това проверката на условието (PS) е завършена.

Да преминем към **геометричните условия**.
Нека $a_2 = \max_{x \in [0,L]} a(x)$, $b_2 = \min_{x \in [0,L]} b(x)$.
От теоремата за влагане на Соболев имаме

$$J(u) = \int_0^L \left[\frac{1}{2} u''^2 + \frac{m}{2} u'^2 + \frac{1}{p} a(x)|u|^p - \frac{1}{q} b(x)|u|^q \right] dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left(u''^2 + m u'^2 \right) dx + \frac{1}{p} \int_0^L a(x)|u|^p dx - \frac{1}{q} \int_0^L b(x)|u|^q dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q} \int_0^L b(x)|u|^q dx \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_1 \|u\|^q = \frac{1}{2}\|u\|^2 \left(1 - 2c_1 \|u\|^{q-2} \right)$$, за някое $c_1 > 0$.

Лесно получаваме,че $J(u) > 0$ при всяко $u \in X$, когато $\|u\| < \left(\frac{1}{2c_1} \right)^{\frac{1}{q-2}}$.

Следователно съществува $\alpha > 0$ и $\rho = \|u\|$ достатъчно малко, така че

$$J\Big|_{\partial B_\rho} \geq \alpha .$$

Така условие (j) е изпълнено.

Предстои проверка на условие (jj). За всяко $n \in N$ означаваме с X_n подпространството на X

$$X_n = Span\left\{\sin\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \dots, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

с норма

$$\left\|\lambda_1 \sin\frac{\pi x}{L} + \lambda_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \dots + \lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right\|_{X_n}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 .$$

Ясно е, че $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset X$, $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = X$.

От еквивалентността на нормите в крайномерни пространства, съществува $c_1(n) > 0$, $c_2(n) > 0$, такива че

$$c_1(n)\|w_n\|_{X_n} \leq \|w_n\|_{L^r} \leq c_2(n)\|w_n\|_{X_n}, \ \forall w_n \in X_n, \ r > 1 .$$

Нека $w_n = \lambda_1 \sin\frac{\pi x}{L} + \lambda_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \dots + \lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L} \in X_n$.

Заместваме в $J(w_n)$ и получаваме

$$J(w_n) = \int_0^L \frac{1}{2} w_n''^2 + \frac{m}{2} w_n'^2 + \frac{1}{p} a(x)|w_n|^p - \frac{1}{q} b(x)|w_n|^q \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \left(w_n''^2 + m w_n'^2\right) dx + \frac{1}{p}\int_0^L a(x)|w_n|^p \, dx - \frac{1}{q}\int_0^L b(x)|w_n|^q \, dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(w_n''^2 + m w_n'^2\right) dx + \frac{a_2}{p}\int_0^L |w_n|^p \, dx - \frac{b_2}{q}\int_0^L |w_n|^q \, dx$$

$$\leq \frac{L}{4}\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + m\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]\|w_n\|_{X_n}^2 + c_1\|w_n\|_{X_n}^p - c_2\|w_n\|_{X_n}^q$$

за някои $c_1, c_2 > 0$. Избираме $R_n = \|w_n\|_{X_n}$ достатъчно голямо и получаваме

$J\Big|_{X_n \backslash B_{R_n}} \leq 0$, тъй като $q > \max(2, p)$. С това доказателството на теоремата е завършено.

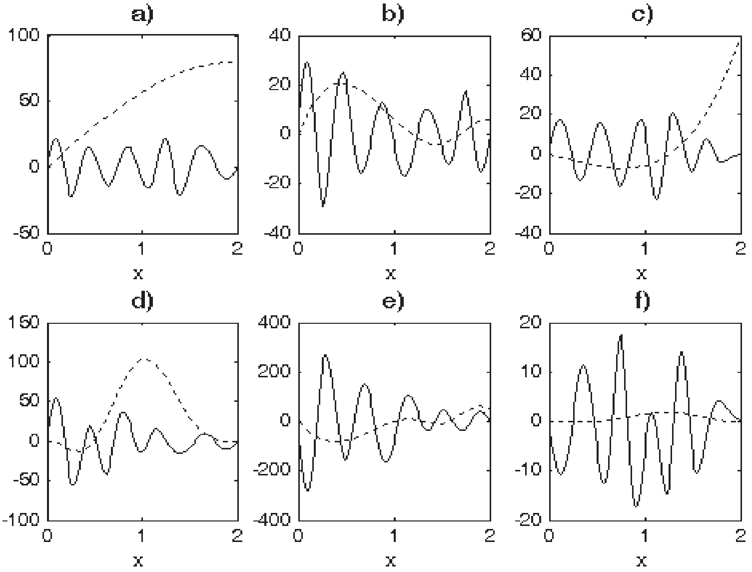
ЧИСЛЕНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ

За да демонстрираме получените аналитични резултати, прилагаме числен алгоритъм, разработен в предишна работа на авторите [Julia V. Chaparova, Eli P. Kalcheva and Miglena N. Koleva, Numerical investigation of multiple periodic solutions of fourth-order semi-linear ODE, Amer. Inst. of Physics Conference Proceedings, to appear].

Алгоритмът се базира на Newton-homotopy метод върху две мрежи. Първо, върху груба мрежа, получаваме числено решение с помощта на множество итерации. След това върху фина мрежа прилагаме само една итерация. За стартиране на алгоритъма се задава някаква начална функция като първо приближение на решението.Тази функция може да е в противоречие с граничните условия на задачата и метода да е ефективен. Главните приемущества на този подход са в спестяване на времето за пресмятане на решенията и увеличаване на областта на сходимост на метода, т.е. увеличаване диапазона на избор на начално приближение. При различен избор на началното приближение алгоритъмът може да получава различни числени решения (както се демонстрира на Фигура 1 и 2), но може да стигне до едно и също решение.

Пресмятанията са направени за

$$a(x) = \sin^2 x \ , \ \ b(x) = 1 + (x^3 - 2x)^2 \, , p = \frac{5}{4}, \ L = 2 \, , \ m = q \, .$$



Фиг. 1. Числени решения (плътна линия) за q=7
и различни начални приближения (пунктир):

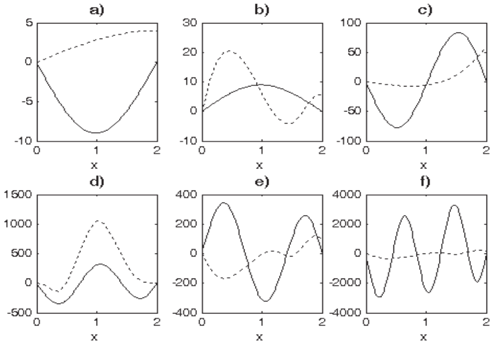
a) $u^0(x) = x^4 + 8x^3 + 64x$; b) $u^0(0) = 0$, $u^0(1) = 6$, , $u^0(2) = 6$;

c) $u^0(x) = \dfrac{1}{50}\left(x^5 + \dfrac{595}{57}x^4 + \dfrac{1720}{57}x^3 - \dfrac{1344}{19}x \right)$;

d) $u^0(x) = -70x^3(x-2)^3(x-\dfrac{1}{2})(2x-5)(x-2)$; e) $u^0(0) = 0$, $u^0(1) = -0.5$,

$u^0(1.25) = 8.5$, $u^0(1.5) = -10$, $u^0(2) = 50$; f) $u^0(x) = -3x^3(x-2)^3(x-\dfrac{1}{2})$

На фигури 1 и 2 показваме получените решения за различни стойности на $q\,(q = 7, \quad q = 3)$ и еднакви начални приближения. Забелязваме, че за големи стойности на q решенията са главно осцилиращи.



Фиг. 2. Числени решения (плътна линия) за q=3
и различни начални приближения (пунктир):

a) $u^0(x) = 0.05(x^4 + 8x^3 + 64x)$; b) $u^0(0) = 0$, $u^0(1) = 6$, $u^0(1.5) = -4$, $u^0(2) = 6$;

c) $u^0(x) = \dfrac{1}{50}\left(x^5 + \dfrac{595}{57}x^4 + \dfrac{1720}{57}x^3 - \dfrac{1344}{19}x\right)$; d) $u^0(x) = -700x^3(x-2)^3(x-\frac{1}{2})(2x-5)(x-2)$;

e) $u^0(0) = 0$, $u^0(1) = -1$, $u^0(1.25) = 17$, $u^0(1.5) = -20$, $u^0(2) = 100$;

f) $u^0(0) = 0$, $u^0(1) = -2$, $u^0(1.25) = 34$, $u^0(1.5) = -40$, $u^0(2) = 200$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Chaparova J., E.Kalcheva, M.Koleva, Numerical investigation ofmultiple periodic solutions of fourth-order semi-linear ODE, Amer.Inst. of Physics Conference Proceedings, to appear.

[2] Dee G., W. Saarloose, Bistable systems with propagating fronts leading to pattern formation, Phys. Rew. Lett. 60(1988) 2641-2644.

[3] Enguica R., A. Gavioli, L. Sanchez, Solutions of second-order and fourth order ODEs on the half-line, NonlinearAnalysis 73(2010) 2968-2927.

[4] Gyulov T., S. Tersian, Existence of trivial and nontrivial solutions fo a fourth-order ODE, Electron J. Diff. Eqns.,(2004) no. 41, 1-14.

[5] Peletier L., W. Troy, Spatial Patterns: Higher order models in physics and mechanics, Birkhlauser, Boston, 2001.

[6] Rabinowitz P., Minimax methods in critical point theory with applications for differential equations , CBMS Regional Conference, 1984.

[7] Tersian S.,J. Chaparova, Periodic and homoclinic solution of extended Fisher-Kolmogorov equations, J. Math. Anal. Appl. 260(2001), 490-506.

[8] Uzunov D., Theory of criticalphenomena,World Scientific, Singapore, 1993.

[9] Zimmermann W., Propagating fronts near a Lifschitz point, Phys. Rev. Lett.,66(1991),15-46.

За контакти:

Гл. ас. Ели Калчева, доц. д-р Миглена Колева, доц. д-р Юлия Чапарова, Катедра *Математика*, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 221, e-mails: (jchaparova,ekalcheva,mkoleva)@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран.