

Апроксимация на функции с ортогонален уейвлет базис

Васил Колев

Function approximations with orthogonal wavelet basis: *Fourier series decomposition given us sinus and cosine functions and usually they don't used for function approximations. This approximation problem in the multiresolution analysis by orthogonal wavelets basis is solved. Examples of arbitrary function with Fourier series and wavelet approximations of function are shows and compared.*

Key words: *approximation, wavelet, FFT, compression, digital signal processing;*

ВЪВЕДЕНИЕ

Разлагането и апроксимацията с уейвлетен ортогонален базис е популярна област на изследване от 1990 за математици, физици, електрически инженери, компютърни учени и др. В математиката е разглеждана в областта на реалния и хармоничен анализ, статистиката, теория на апроксимацията и др. Приложенията на уейвлетите имат значителен принос в цифрова обработка на изображения, особено в комуникациите, медицината, сеизмологията, астрофизика и др. където функциите (сигналите) съдържат различен вид шум е необходимо да бъде премахнат. Понякога както в математиката, така и в техниката за да се знае характера на произволна функция е необходимо да се получи добре познатата ФТ и уейвлетна трансформация.

В настоящата работа предлагаме сравнителен анализ на апроксимация на функции чрез БФТ и ортогонален уейвлетен базис [1].

АПРОКСИМАЦИЯ НА ФУНКЦИЯ С БФТ

Всяка функция може да бъде дигитализирана и трансформирана в честотната област чрез използването на ДФТ [2]. БФТ [2] е ефективен метод и се използва в цифровата обработка на сигнали (ЦОС) [3] като резултатът е комплексни коефициенти, с реална и имагинерна част, или амплитудно и фазови функции по честота. Следователно, за апроксимация на функция са необходими много от съставните хармоници като с увеличаването им апроксимацията се подобрява.

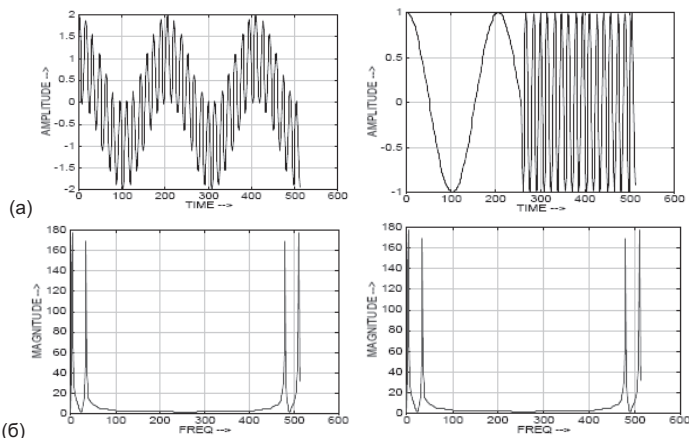
Фурие разлагане на произволна функция $f(t)$ се представя с:

$$f(t) = a_0 + \sum_n (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (1)$$

където $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$, и за $n \geq 1$ коефициентите са $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$, и

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$. С това функция измерена във времето се преобразува в

спектр и се анализира чрез БФТ. Този спектрален анализ показва амплитудите на различните съставни честоти, фиг.1(б), но не и локалните особености на функцията. Недостатък е, използването на ФТ за нестационарни функции тъй като не дава информация за промяна на функцията във времето. Например, за две нестационарни функция фиг.1(а) (т.е. функции променящи се във времето) се получават еднакви ФТ, фиг.1(б). Това означава, че ФТ не описва функцията едновременно по време и честота. Това може да бъде направено с разлагането на ортогонални базисни функции разгледни в следващата точка.



Фиг.1 ФТ за две функции; (а) сума от нискочестотна функция с високочестотен шум (ляво), нискочестотна и последваща високочестотна функция (дясно); (б) ФТ за двете функции

Ако изразим грешката в апроксимацията на функция с ФТ за $k < n$ чрез

$$\|f(t) - P_k f\| = \left(\sum_{k+1}^n (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right)^{1/2}, \quad (2)$$

където $P_k f(t)$ е апроксимираната функция с ФТ, е очевидно, че ако първите k -коефициенти са 0 или много малки, апроксимацията практически не е полезна.

АПРОКСИМАЦИЯ НА ФУНКЦИЯ С ОРТОГОНАЛЕН УЕЙВЛЕТЕН БАЗИС

Както бе отбелязано ФТ показва глобалните особености във функциите, т.е. хармоничните съставки на целия сигнал без локалните особености. За да се извлекат и покажат се използва разлагане с двойка ортогонални функции, скалираща и уейвлетна функция.

Дефиниция 1: Скалираща (мащабираща) функция

Мащабираща (скалираща) функция е малка вълна, което означава че има компактна основа, т.е. стойностите ѝ клонят или са близки до нулата и има крайна енергия в L^2 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt = 1 \quad (3)$$

Понякога се наричат “бацин” уейвлет и се представят с формулата:

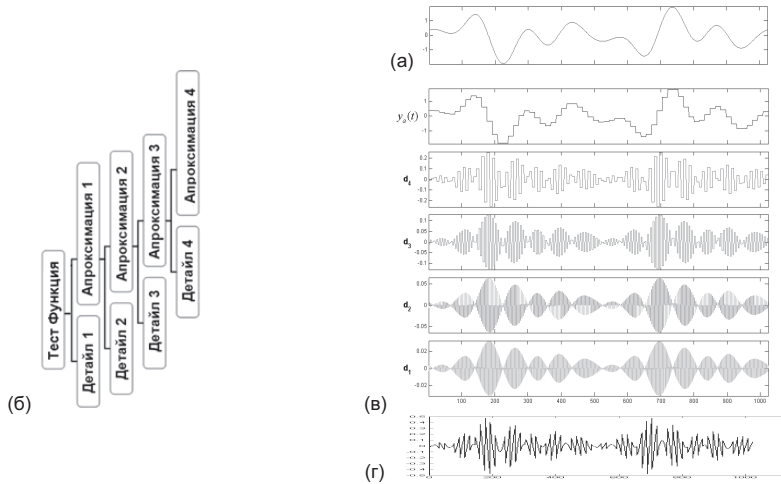
$$\varphi(t) = \sum_n \sqrt{2}h(n)\varphi(2t - n), \quad (4)$$

където коефициентите $h(n)$ се определят от $h(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \varphi(t/2), \varphi(t-k) \rangle$.

Дефиниция 2: Уейвлет функция

Уейвлет функция е също малка вълна с компактна основа и крайна енергия в L^2 със средна стойност нула:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (5)$$



Фиг. 2. Двоично-дървовидна структура за Хаар уейвлет анализ на 4 нива; (а) Тест функция (сигнал); (б) Блоково представяне; (в) Апроксимирана функция ($y_a(t)$) и функциите на детайлите (d_4, d_3, d_2, d_1); (г) Абсолютна грешка между двете функции;

Функцията се нарича “майчин” уейвлет и се представя чрез формулата:

$$\psi(t) = \sum_n \sqrt{2}g(n)\varphi(2t - n) \tag{6}$$

където коефициенти $g(n)$ се определят от $g(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi(t/2), \varphi(t - k) \rangle$.

Обратно, ако знаем коефициентите $h(n)$ и $g(n)$ може да определим скалираща и уейвлетна функции чрез каскаден алгоритъм [1] за интервал $[0, n - 1]$:

$$\varphi^{i+1}(t) = \sum_n \sqrt{2}h(n)\varphi^i(2t - n) \tag{7}$$

с $\varphi^0(t)$ равна на Хаар скалираща функция, и грешка ε

$$\varepsilon = \|\varphi^{i+1}(t) - \varphi^i(t)\|^2. \tag{8}$$

Уейвлетното разлагане за функция $f(t)$ на ниво j се изразява с формулата:

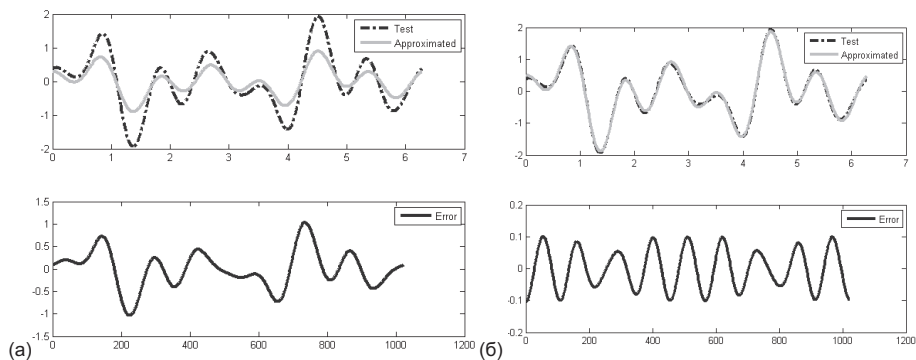
$$f(t) = \sum_n h(n)\varphi(t - n) + \sum_j \sum_n g_{2^j+n}(n)\psi(2^j t - n) \tag{9}$$

Съществува връзка между коефициентите $h(n)$ и $g(n)$ в двете функции (4) и (6)

$$g(n) = (-1)^n h(1 - n). \tag{10}$$

Първата сума в (9) е апроксимирания сигнал $y_0(t)$, докато втората сума показва детайлите на функцията за j -нива на разлагане.

Анализ на функция чрез ортогонален базис е показан на Фиг.2(б). След прилагане на мащабиращата и уейвлетна ортогонални функции върху тест функцията $y(t)$ са получени подфункции за по-малки мащаби. На тези подфункции се прилага двойно преместване по времето, наречено дилатация, с което се получават функциите **Апроксимация 1** и **Детайл 1** с 2-пъти по-малък мащаб. С други думи извършено е едно ниво на анализ на функцията. Повтаряме процеса за **Апроксимация 1**, и получаваме **Апроксимация 2** и **Детайл 2**. Процеса може да бъде продължен до получаване само на една стойност.



Фиг.3 Тест функция (прекъснатата линия) и апроксимирана функция чрез БФТ (непрекъснатата линия); (а) Апроксимация с първите 8 честоти (горе) и абсолютната грешка между тях (долу); (б) Апроксимация с първите 8 и с последните 8 най-високи честоти (горе) и абсолютната грешка между тях (долу);

Резултата е област състояща се от детайлните коефициенти като всеки от тях е свързан с апроксимираната функция за същото ниво. Детайлните функции са ортогонални и следователно независими една от друга и може да се използват всички заедно или всяка поотделно. Това дава възможност да се апроксимира функция единствено с апроксимиращата функция за дадено ниво.

За точност на апроксимираща функция ще използваме средно квадратичната грешка (СКГ):

$$СКГ = \frac{\|y(t) - y_a(t)\|^2}{N} . \quad (11)$$

ПРИМЕРИ И СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ

Пример 1: Фурие Апроксимация

Използваме следната тест функция $y(t)$ с 1024 стойности:

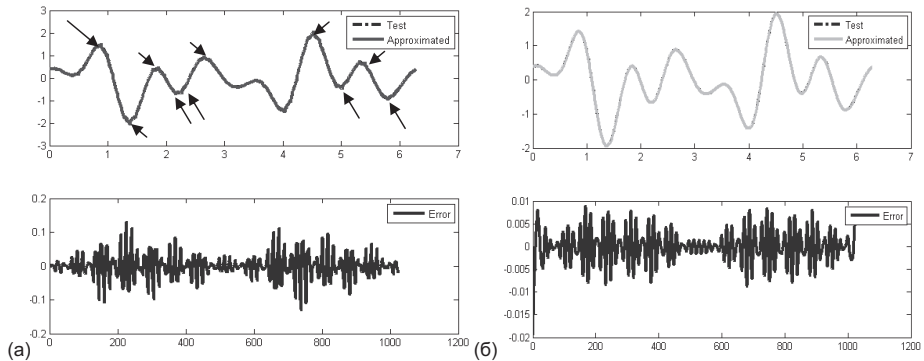
$$y(t) = e^{-\sqrt[4]{\cos t}} \exp(-\sqrt[4]{\cos t})(\sin 3t + \cos 7t + 0.4 \sin 3t \sin 2t) ,$$

където $0 \leq t \leq 2\pi$. Ключови са Matlab командите *fft* и *ifft*, които изчисляват правата и обратна БФТ. Разгледани са апроксимации на функция с различен брой начални и/или крайни стойности. Тест и апроксимираната функция чрез БФТ от първите 8 най-ниски честоти е показан на Фиг.3(а), докато на Фиг.3(б) е показана апроксимация от първите 8 и последните 8 честоти.

Пример 2: Уейвлетна Апроксимация

Пример за уейвлетно получаване на апроксимираща функция е чрез разлагане с Хаар уейвлет базис. Съществено предимството на този тип разлагачи ортогонални функции, че не се изисква предварително разширение на тест функцията и може да се приложи в реално време. Също така тези функции са аналогични при извършване на операциите линейно квантуване. Уейвлетно разлагане на 4 нива с фактор на децимация 2 и Дюбеши D_2 е показано на фиг.2(б), като с увеличаване нивата на разлагане се увеличават и функциите на детайлите:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0(t) + d_1(t); && \leftarrow \text{ниво 1} \\ &= y_1(t) + d_2(t) + d_1(t); && \leftarrow \text{ниво 2} \\ &= y_2(t) + d_3(t) + d_2(t) + d_1(t); && \leftarrow \text{ниво 3} \\ &\vdots \end{aligned}$$



Фиг. 4. Апроксимация на тест функция с Дюбеши уейвлети (а) D_2 ; и (б) D_4 ; (горе) апроксимирана функция от 4 ниво; и (долу) Абсолютна грешка между двете функции;

Чрез използването средата на Matlab [4], за $j=4$ са получени апроксимираната функция $y_a(t) = y_3(t)$ с детайлни стойности (d_4, d_3, d_2, d_1) показана на фиг.2(а). Грешките между тест функцията и двете апроксимация са дадени в Таблица 1.

Следващите по дължина са ортогоналните функции на Дюбеши. Обработката с тях изисква предварително добавяни стойности от двете страни на функцията, за избягване на краевите ефекти. Резултатите показват, че при ортогоналните функции на Дюбеши D_2 , се получават малки фалшиви пикове в апроксимираната крива, посочени на фиг.4 със стрелки. Детайлните функции дават допълнителна информация за СКГ, откъдето можем да определим характера на тест функцията. Например, в функция $y(t)$ се съдържа модулация на две функции.

За постигане на приблизително еднакви СКГ, (виж Таблица 1), е необходимо апроксимацията с ФТ да бъде чрез първите 9 и последните 9 функции, докато апроксимацията с Хаар базис, е необходимо единствено апроксимираната функция от 3 ниво.

За да имаме приблизително еднакви СКГ на ФТ и разлагането с Дюбеши базис на 5 ниво, е необходимо апроксимацията с ФТ да бъде чрез първите и последните 8 функции. Следователно, и двата случая при апроксимация с ФТ се изисква 16 и 18 функции, докато при апроксимацията чрез ортогонален базис е необходима само 1 функция.

При апроксимация с ортогонални базис, имаме гранично ниво на разлагане което води до апроксимираната функция от по-високо ниво да ба бъде с по-висока СКГ. Например, за апроксимираща функция с Хаар уейвлет от 3 ниво на разлагане СКГ се повишава с повече от 4 пъти, т.е. от $СКГ=0.000917$ достига $СКГ=0.0038$, докато с апроксимираща функция с D_2 уейвлет от 5 ниво на разлагане, СКГ се повишава с повече от 14 пъти, т.е. от $СКГ=0.0009574$ достига $СКГ=0.0136$. Възможно решение е използването на D_4 , фиг.4(б). С това се избягват появяването на фалшиви пикови стойности в апроксимираната функция като се намалява СКГ с около 10 пъти и достига $СКГ=1.1441 \cdot 10^{-5}$.

Важна характеристика е зависимостта на степента на разлаганите функции (броя на филтърните коефициенти) от j -то ниво на разлагане за получаване на минимална СКГ. От направите разлагания с Дюбеши уейвлети за настоящата тест функция граничното ниво на разлагане е 5 ниво за D_{20} .

Таблица 1

Сравнителни резултати при урие и Уейвлетно разлагане изразени чрез СКГ

Фурие разлагане	Фурие коефициенти		СКГ
	първи	последни	
	5		0.4408
	5	5	0.3236
	6		0.3933
	6	6	0.3078
	7		0.3933
	7	7	0.0874
	8		0.1729
	8	8	0.0139
	9		0.1729
	9	9	0.0037
	10		0.1627
	10	10	0.00037
	1022		0.0045
	1023		0.0045
	1024		0

Уейвлетно разлагане	уейвлет	ниво	СКГ
	Хаар		1
		2	$9.17 \cdot 10^{-4}$
		3	0.0038
		4	0.0154
		5	0.0591
Дюбеши D_2		1	$2.444 \cdot 10^{-7}$
		2	$3.956 \cdot 10^{-6}$
		3	$6.182 \cdot 10^{-5}$
		4	$9.574 \cdot 10^{-4}$
		5	0.0136

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разлагането с Фурие трансформация води до комплексни функции по честота и фаза, докато разлагането с уейвлет ортогонален базис получаваме ортогонални функции по скала и време. С това е възможна апроксимация само с една функция от получените апроксимиращи функции за дадено j -ниво, $y_a(t) = y_j(t)$. Нещо повече, от вида на получените детайлни функции може да се анализира характера на функцията. Диадичният мащаб на разлагане с уейвлетния ортогонален базис представя функция с 2^{-j} - пъти по-малко стойности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. Strang, *Wavelet and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.
 [2] A. Oppenheim and R. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, 3 Edition, Prentice Hall, 2010.
 [3] J. Proakis and D. Manolakis, *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 2007.
 [4] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim and J. Poggi, *Wavelet Toolbox: User Guide, Mathworks*, 2013.

За контакти:

Васил Колев, ИИКТ, БАН, София, e-mail: kolev_acad@abv.bg

Докладът е рецензиран.