

Използване на компютърната системата *Mathematica* при изучаване на определен интеграл

Антоанета Михова

Using the computer system Mathematica in studying definite integral: Some possibilities of the computer system Mathematica to calculate definite integral and to drawing graphics are described in the paper. With examples is shown how with Mathematica the finding the area of plane figures and the length of the curve becomes easier and faster.

Key words: Computer system Mathematica, definite integral.

ВЪВЕДЕНИЕ

През последните години учебните планове на много университетски специалности претърпяха значителни промени, съобразени с нови държавни изисквания и със съвременните потребности на обществото. В плановете на голяма част от специалностите на техническите университети броят на часовете по математика беше драстично намален, което доведе до съществена редукция на съдържанието на учебните програми. Преподавателите са изправени пред необходимостта за кратко време да предадат основния теоретичен материал и то по интересен начин, а семинарните упражнения да са максимално ефективни. За по-доброто разбиране и усвояване на основни понятия и твърдения, а също и за засилване на интереса на студентите към математическите дисциплини е подходящо използването на различни софтуерни продукти. Днес съществуват различни компютърни системи за математически пресмятания като *Mathematica*, Maple, Matlab, Derive, Reduce, Maxima и други, които могат да са в помощ и на преподавателите, и на студентите.

Много университетски преподаватели споделят опит от работа си с различни програмни продукти. В [2], [3], [4] и [9] са описани възможности на системата *Mathematica*, а в [1], [3] и [5] възможности на системата Maple, които могат да се използват в обучението по математически дисциплини.

Настоящата статия разглежда приложение на системата *Mathematica* в обучението по Математичен анализ II и Висша математика II и по-специално в преподаването на определен интеграл.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Системата *Mathematica* е интегрирана среда за математически пресмятания. С вградените в нея функции за символни пресмятания и добрите графични възможности, които притежава, тя е много подходяща за използване в часовете по математика.

Mathematica е разработена от Стивън Волфрам [6] и първата версия излиза през 1988 година. През следващите 25 години продуктът се усъвършенства, откликвайки на нуждите на милионите си потребители, и през 2013 година излиза *Mathematica 9*. Към стандартните версии на системата се предлагат и допълнителни пакети за различни научни направления като приложна физика, финансовата математика, приложна статистика, биоматематика, Грасманова алгебра и др.

Кратка характеристика на системата *Mathematica* е дадена в [3]:

- Изключително удобна среда за вход и изход на формули със стандартна математическа символика.
- Числени и символни изчисления в интерактивен режим.
- Изчисления с произволно зададена точност.
- Математически поддържана 2D и 3D графика, анимация и музика, включително в реално време.

- Силно развит програмен език, близък до C++.
- Вградени над 1000 функции за изчисления във всички области на математиката.
- Съвместимост с програмните езици C++, Pascal, Fortran и др., с които е възможен обмен на данни и програмни модули.
- Отвореност за дефиниране на потребителски правила, функции, процедури и пакети с функции.
- Доразвити версии за работа в интернет среда и разработка на приложения.
- Лесна публикуемост чрез продукта Publicon на Wolfram Research.
- Възможности за обмен в различни формати: HTML, XML (XHTML + MathML) и други.

ИЗПОЛЗВАНЕ НА MATHEMATICA ПРИ ИЗУЧАВАНЕ НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

За решаване на задачите, описани в статията, е използвана версията *Mathematica 6*.

Пресмятането на определения интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с *Mathematica* може да

стане по следните два начина:

1. Чрез функцията `Integrate[f,{x,a,b}]`.
2. Чрез използване на вградения пакет **BasicMathInput**.

В [7] е предложен набор от задачи по темата Определен интеграл, някои от които решаваме по-долу с помощта на *Mathematica 6*. Освен това са разгледани и примери за приложения на определен интеграл.

В първа и втора задача за пресмятане на определен интеграл използваме помощния пакет **BasicMathInput**, а в останалите задачи използваме функцията `Integrate[f,{x,a,b}]`.

Задача 1. Да се пресметне интегралът $\int_0^3 \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

Решение.

$$\text{In}[1]= \int_0^3 \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$$

$$\text{Out}[1]= \frac{201}{2000} + \frac{5 \text{ArcTan}[3]}{16}$$

Задача 2. Да се намери границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3}$.

Решение.

$$\text{In}[2]= \text{Limit} \left[\frac{\int_0^{x^2} \sin[\sqrt{t}] dt}{x^3}, x \rightarrow 0 \right]$$

$$\text{Out}[2]= \frac{2}{3}$$

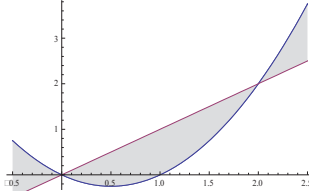
Задача 3. Да се намери лицето на фигурата, ограничена от линиите $y = x^2 - x$ и $y = x$.

Решение. Решението ще направим на няколко етапа:

3.1. Чертаем двете линии (Фигура 1).

```
In[3]:= Plot[{x^2-x,x},{x,-0.5,2.5},Filling->{1->{2}},
  FillingStyle->LightGray]
```

Out[3] :=



Фигура1. Графики на $y = x^2 - x$ и $y = x$

3.2. Намираме координатите на пресечните точки като решаваме системата

$$\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = x. \end{cases}$$

```
In[4] := Solve[{y==x^2-x,y==x},{x,y}]
```

```
Out[4] := {{y->0,x->0},{y->2,x->2}}
```

3.3. Намираме лицето на фигурата, като пресмятаме $S = \int_0^2 [x - (x^2 - x)] dx$.

```
In[5] := Integrate[x-(x^2-x),{x,0,2}]
```

```
Out[5] := 4/3
```

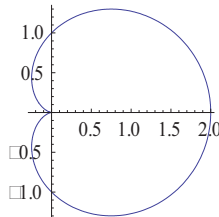
Задача 4. Да се намери лицето на фигурата, ограничена от кардиоидата $\rho = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Решение.

4.1. Чертаем кардиоидата, зададена с полярното си уравнение (Фигура 2).

```
In[6] := PolarPlot[1+Cos[θ],{θ,0,2π}]
```

Out[6] :=



Фигура 2. Кардиоидата $\rho = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

4.2. Намираме лицето на фигурата $S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$.

```
In[7] := 1/2 Integrate[(1+Cos[θ])^2,{θ,0,2π}]
```

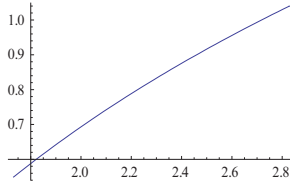
```
Out[7] := (3π)/2
```

Задача 5. Да се намери дължината на кривата $L: y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

Решение.

5.1. Чертаем кривата L (Фигура 3).

```
In[8] := Plot[Log[x], {x, Sqrt[3], Sqrt[8]}]
Out[8] :=
```



Фигура 3. Кривата $L: y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

5.2. Намираме дължината $l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + [(\ln x)]^2} dx$.

За да намерим производната на f относно променливата x използваме функцията $D[f, x]$.

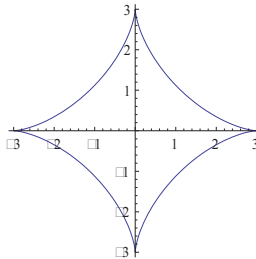
```
In[9] := Integrate[Sqrt[1 + (D[Log[x], x])^2], {x, Sqrt[3], Sqrt[8]}]
Out[9] := 1/2 (2 + Log[3/2])
```

Задача 6. Да се намери дължината на астроидата $L: \begin{cases} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$

Решение.

6.1. Чертаем кривата L , зададена с параметричните си уравнения (Фигура 4).

```
In[10] := ParametricPlot[{3 (Cos[t])^3, 3 (Sin[t])^3}, {t, 0, 2π}]
Out[10] :=
```



Фигура 4. Астроидата $L: \begin{cases} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

6.2. Намираме дължината на дъгата $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(3 \cos^3 t)]^2 + [(3 \sin^3 t)]^2} dt$.

```
In[11] := Integrate[Sqrt[(D[3 (Cos[t])^3, t])^2 +
(D[3 (Sin[t])^3, t])^2], {t, 0, 2π}]
```

```
Out[11] := 18
```

За по-добър резултат от упражненията, при подбора и подредбата на задачите към конкретна тема, може да се спазват предложените в [8] група изисквания, приложими в обучението по математически дисциплини.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чрез използването на софтуерни продукти за математически пресмятания в часовете по математика се спестява доста механична работа, което може да увеличи броя на решаваните задачи. Освен това графичните възможности на системата *Mathematica* дават възможност за по-лесно възприемане на основни понятия от математическия анализ, което би допринесло за осъзнаване от студентите на необходимостта от изучаване на математическите дисциплини. Променяйки параметрите на използваните функции студентите могат да експериментират и да анализират получаваните различни ефекти и по този начин да развият критично мислене към крайните резултати. Не на последно място трябва да имаме в предвид, че съвременните студенти са от поколение израснало с бързо развиващи се информационни технологии и тези технологии трябва да намерят място и в учебния процес.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Evtimova, V. Using the Maple software product in studying functions, Proceedings of the Union of Scientists - Ruse, b. 5 Mathematics, Informatics and Physics, vol. 10, 2013, 115-123.

[2] http://fmi.uni-plovdiv.bg/evlm/DBbg/database/teacherbook/11USAL_BG.pdf.

[3] http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/database/teacherbook/16BG_system%20math/index.html.

[4] Rashkova, Ts. Usage of the system *Mathematica* in the teaching and learning member theory, Proceedings of the Union of Scientists - Ruse, b. 5 Mathematics, Informatics and Physics, vol. 10, 2013, 107-114.

[5] Vasileva-Ivanova, R. Plane in space with mathematical, Proceedings of the Union of Scientists - Ruse, b. 5 Mathematics, Informatics and Physics, vol. 10, 2013, 124-129.

[6] Wolfram, St., 1993. *Mathematica A System for Doing Mathematica by Computer*, 2-nd ed., Addison-Wesley.

[7] Каракашева, Л. Относно изучаването на темата „Определен интеграл“ при студентите първокурсници, Научни трудове на РУ „Ангел Кънчев“, том 47, сер. 5.1, Русе, 2008, 28-30.

[8] Каракашева, Л. Относно планирането на учебното съдържание по Математичен анализ за семинарните упражнения, Научни трудове на РУ „Ангел Кънчев“, том 50, сер. 6.1, Русе, 2011, 35-38.

[9] Лалов, П., В. Христов. Математика за инженери чрез „Mathematica“, Годишник на Минно-геоложкия университет „Св. Иван Рилски“, том 51, Св.IV, Хуманитарни и стопански науки, София, 2008, 65-69.

За контакти:

Гл. ас. д-р Антоанета Михова, Катедра “Математика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 727, e-mail: amihova@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран.