Синтетични и аналитични доказателства на математически твърдения

Десислава Георгиева

Evidence of mathematical statements: *Many students have difficulties in proving theorems. This article can be used by the future mathematics teachers as a useful model for teaching how to prove theorems. The synthetic method for direct proof of theorem doesn't develop research skills. The analytic method has two different schemes of constructions – the Euclid's scheme and the Pap's scheme. It builds evidential style of thinking. The Pap's scheme is more useful about class room.*

Key words: *Theorem, Training model, Synthetic Prove, Analytic Prove, Euclid's scheme, Pap's scheme*

ВЪВЕДЕНИЕ

Голяма част от учениците и студентите срещат затруднения при доказването на теоремите. В повечето случаи те наизустяват самото доказателство (т.н. „parrot learning"), от което няма особен смисъл. Синтетичното изложение на доказателство, предоставено в учебниците е кратко и подредено логически, но не развива умения за самостоятелно търсене и потвърждаване на хипотези.

Ролята на преподавателя е да ръководи аналитично доказателство, с което развива мисленето на обучаваните, засилва изследователските им умения, увеличава способността им да се аргументират и в други сфери на живота.

Цел на настоящата статия е да се представят базови модели за преподаване на математически доказателства, които се използват в обучението на бъдещите учители по математика.

Представени са: понятието „доказателство"; синтетичен и аналитичен метод на доказателство; аналитична схема на Евклид;аналитична схема на Пап.

ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Понятието „доказателство"

От философска гледна точка „Доказателството е система от разсъждения за убеждаване във верността или неверността на дадено твърдение" *В. Успенский* [8].

От научна гледна точка „ Доказателството е последователност от символи подредени по определени правила" група *Бурбаки*

Според Ив. Ганчев доказателството е свързано с убеждаване във верността или неверността на едно твърдение, което може да стане по четири начина:

а) Авторитарно;
б) Нагледно – геометрично (съответства на предгръцкия период);
в) Чрез използване на пълна индукция;
г) Чрез използване на дедуктивни умозаключения [3].

При нагледно-геометричното доказателство, убеждаването във верността на твърдението се извършва с промяна на реални обекти с измервания и сравнения. Те могат да се използват успешно от най-ранна възраст до горен курс на обучение, преди формалното доказателство, с цел привличане на вниманието на учениците, оживяване на учебния процес и свързване на науката с реалния живот. Такива примери са дадени от С. Гастева [4] и В. Чичигин [9]. Експерименталното преоткриване на теореми може да се осъществи и с помощта на геометричен обучаващ софтуер [11].

Под доказателство в аксиоматична теория се разбира една крайна последователност от умозаключения, изказани и записани в термините и символите на тази теория, като всяко от тях се основава на аксиоми и преди това получени твърдения, като се използват правилата за извод и законите на логиката, чрез която последователност се установява верността или неверността на даденото съждение [3].

С всяко доказателство се свързват три основни обекта: тезис, основания и правила за извод или закони от логиката.

Тезисът е твърдението, чиято вярност или невярност се установява.

Основанията са известните твърдения, които се използват за установяване на верността или неверността на тезиса.

Правилата за извод и **законите от логиката** определят реда и начина на съчетаване на основанията, чрез които се потвърждава или отрича тезиса [2].

В математиката се признава само доказателство, в което всички умозаключения са дедуктивни или пълни индукции. Такива са всички доказателства, които се използват в обучението по математика. За първи път явно се формулира теорема в 7^-ми^ клас – теорема за връхни и съседни ъгли [6]. Другите разсъждения, чрез които се показват различни свойства на базата на индуктивни умозаключения не са доказателства.

Математическите доказателства се делят на два основни вида в зависимост от това дали при доказване на съответното твърдение се използва неговото отрицание - **косвено доказателство** и **пряко доказателство**.

2. Структура на пряко доказателство на твърдение от вида $p \to q$ (импликация) и $p \leftrightarrow q$ (равнозначност).

Ако сравним верностната таблица на импликацията и на равнозначността, се забелязва логическия закон, изразяващ зависимостта между тези съждения:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Следователно за да се разкрие по-детайлно структурата на доказателства от вида p↔q, достатъчно е да разкрием структурата на твърденията от вида $p \to q$. А тяхното доказателство се основава на правилото за извод

$$\frac{p \to p_1, \quad p_1 \to p_2, \quad \dots, p_{k-1} \to p_k, \quad p_k \to q}{p \to q} \; (1)$$

което се нарича хипотетичен силогизъм. Над чертата се записват конюнкциите на импликациите, самата черта замества релацията следва, т.е. това може да бъде записано по следния начин: $(p \to p_1) \wedge (p_1 \to p_2) \wedge \cdots \wedge (p_{k-1} \to p_k) \wedge (p_k \to q) \Rightarrow (p \to q)$

Където всяка от импликациите $p_i \to p_{i+1}$ се основава на аксиома, теорема или определение.

Откриването на доказателството на твърдението $p \to q$ се свежда до откриването на импликациите над чертата в хипотетичния силогизъм и подреждането им в съответния ред. Ефективността на тази дейност зависи от:

а) Владеенето на общи схеми за преминаване от една импликация към друга;

б) От разполагането с достатъчно пълни дидактически системи от признаци и дидактически системи от свойства за понятията за които се отнасят съответните импликации [2].

Още от времето на древните гърци, са се наложили три схеми за откриване и подреждане на импликациите: схема на синтеза, схема на Евклид и схема на Пап.

2.1 Схема на синтетично доказателство на твърдението p→q

Започва с установяване на верността на заключението p_1 от условието p на основата на някои от познатите до момента твърдения от теорията, свързана със съждението p . След това аналогично от p_1 се получава p_2 и т.н. докато се получи q .

Схемата на разсъждение може да се запише така:

Тъй като е вярно p , то е вярно и p_1 $(p \to p_1)$
Тъй като е вярно p_1, то е вярно и p_2 $(p_1 \to p_2)$

………………………………………………………………

Тъй като е вярно p_k, то е вярно и q $(p_k \rightarrow q)$

Съждението p е вярно, тогава според схема (1), която е правило за извод, следва верността на твърдението q .

В случая направо се дават и съединяват в доказателство междинните импликации $p \rightarrow p_1$, $p_1 \rightarrow p_2$, $\dots, p_{k-1} \rightarrow p_k$, $p_k \rightarrow q$ затова се казва, че доказателството е синтетично.То е кратко и структурирано, затова се използва при изложение на съдържанието на учебните пособия.

Съгласна съм с мнението на Ив. Ганчев, че са налице някои сериозни недостатъци:

- налице е голяма неопределеност и многозначност при откриване на импликациите;
- за невладеещия го ученик остават неясни мотивите при избора на отделните импликации и особено на първата от тях поради което процесът на доказване може да остане нецеленасочен и немотивиран;
- наличие на трудности при схващане на дедуктивната структура на всеки извод [3].

Затова доказателствата не бива да се провеждат по този метод в учебните часове по математика, а да се използва един от следните два метода.

2.2 Схема на аналитично доказателство на твърдението p→q

При аналитичното доказателство на твърдението $p \rightarrow q$ се започва от съждението q и се търси твърдение, което следва от q или твърдение, от което следва q .

2.2.1 Схема на Евклид (схема на несъвършен анализ)

Нарича се схема на анализ, защото се използва за разделяне на доказателството на отделни импликации.

В този случай разсъжденията протичат така:

Ако q е вярно, то е вярно и p_k $(q \rightarrow p_k)$

Ако p_k е вярно, то е вярно и p_{k-1} $(p_k \rightarrow p_{k-1})$

……………………………………………………………..

Ако p_1 е вярно, то е вярно и p $(p_1 \rightarrow p)$

С тези разсъждения се откриват точно обратните импликации. От тук не може да се направи извод, че $p \rightarrow q$ е вярно твърдение, защото разсъжденията са направени по схемата,

$$\frac{q \rightarrow p_k,\ p_k \rightarrow p_{k-1}, \dots, p_2 \rightarrow p_1,\quad p_1 \rightarrow p}{p \rightarrow q} \quad (2)$$

която **не е правило за извод**. Затова се нарича схема на несъвършен анализ. Тя е открита първо в „Началата“ на Евклид [3].

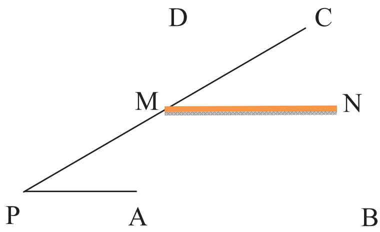
Първата част от разсъжденията по схемата на Евклид **имат евристичен характер**, те само показват кои са импликациите, верността на които трябва да се установи. След това трябва да се провери верността на импликациите $p \rightarrow p_1$, $p_1 \rightarrow p_2$, $\dots, p_{k-1} \rightarrow p_k$, $p_k \rightarrow q$ и те да се подредят в необходимия ред, т.е. написва се синтетичното доказателство, ако отделните изводи се явяват съседни звена на веригата от импликации.

Да разгледаме пример за доказателство по схемата на Евклид за теорема изучавана в $7^{\text{-ми}}$ клас, понеже голяма част от учениците се затрудняват в доказването на успоредност:

Теорема: Средната основа на трапец е успоредна на основите му.

Дадено: MN– средна основа на трапеца $ABCD$

Да се докаже, че: $MN \parallel AB\ (CD)$



Фиг. 1 Средна основа на трапец

Доказателство:

Тръгваме в обратен ред от това, което е дадено към това, което трлябва да се докаже. Построявавем *MN* успоредна на *AB* и *N* среда на *BC*. Така обучаваните се насовчват да използват преди това изучената теорема за „средна отсечка в триъгълник", за тях става интуитивно ясно, защо построяваме триъгълника PBC. Ако доказателството се представя синтетично, необходимостта от построяването на този триъгълник първоначално остава неясна за учениците, на тях процеса на доказване започва да изглежда сложен, у тях възниква въпроса, който и Д. Пойа си е задавал като студент „Да това решение видимо постига целта и изглежда да е вярно, но как може да се измисли такова решение … По какъв начин аз мога да направя това?...." [7]. Голяма част от тях губят интерес и престават да слушат активно. Така започва да се губи мотивацията за изучаването на предмета математика у по-голямата част от учащите. Затова е по-добре да се направи несъвършен анализ, по схемата на Евклид.

Таблица 1. Схема на несъвършен анализ

	q		p_0				p_4
Ако	$MN \parallel AB$	и	N среда на BC			то	MN средна отсечка в ΔPBC
			p_4				p_3
Ако	MN средна отсечка в ΔPBC					то	$MP = MC$
	p_3		r		s		p_2
Ако	$MP=MC$	и	$\sphericalangle AMP=\sphericalangle DMC$	и	$\sphericalangle PAM=\sphericalangle CDM$	то	$\Delta AMP \cong \Delta DMC$
	p_2						p_1
Ако	$\Delta AMP \cong \Delta DMC$					то	$MA = MD$
	p_3		p_0				p
Ако	M среда на AD	и	N среда на BC			то	MN средна основа в трапеца $ABCD$

Проведохме разсъжденията в обратен ред, за да можем да се досетим какво е необходимо да използваме, но с това все още не е доказана дадената теорема. Схемата на Евклид не е доказателство, защото разсъжденията започват от съждението q, това което се изисква да се докаже, а то може да е вярно, но може да не е вярно. Следва синтеза, като се проверява верността на необходимите импликации.

Таблица 2. Схема на синтез след направения анализ

	p						p_1
Тъй като	*MN* средна основа в трапеца *ABCD*					то	*M* среда на *AD*
	p_1		r		s		p_2
Тъй като	*MA = MD*	и	∢ *AMP*=∢ *DMC*	и	∢ *PAM*=∢ *CDM*	то	Δ*AMP*≅ Δ*DMC*
	p_2						p_3
Тъй като	Δ*AMP*≅ Δ*DMC*					то	*MP*=*MC*
	p_3		p_0				p_4
Тъй като	*M* среда на *PC*	и	*N* среда на *BC*			то	*MN* средна отсечка в Δ*PBC*
	p_4						q
Тъй като	*MN* средна отсечка в Δ*PBC*					то	*MN*‖*AB* (*CD*)

2.2.2 Схема на Пап (съвършен анализ) за доказателство на твърдение от вида $p \to q$

При тази схема се започва с търсене на съждение, от което следва q , затова разсъжденията се провеждат по следния начин:

За да е вярно q , достатъчно е да е вярно p_k $(p_k \to q)$

За да е вярно p_k, достатъчно е да е вярно p_{k-1} $(p_k \to p_{k-1})$

……………………………………………………………………………………

За да е вярно p_2, достатъчно е да е вярно p_1 $(p_1 \to p_2)$

За да е вярно p_1, достатъчно е да е вярно p $(p \to p_1)$

При разсъжденията по тази схема, се откриват нужните импликации. Пренареждането им не е необходимо, защото разсъжденията са протекли по схемата,

$$\frac{p_k \to q,\ \ p_{k-1} \to p_k,\ \ \dots,\ p_1 \to p_2,\ \ p \to p_1}{p \to q} \quad (3)$$

която е същото правило за извод, понеже конюнкцията е комутативна.

Тъй като и при тази схема, доказателството на твърдението се разделя на отделни импликации, тя също е схема за анализ. Понеже при нея направо се откриват съответните импликации, тя се нарича схема на съвършен анализ.

Таблица 3. Схема на Пап – съвършен анализ

	q		p_4		
За да е вярно	*MN*‖*AB*	достатъчно е да е вярно	*MN* средна отсечка в триъгълник		
	p_4		p_3	p_0	
За да е вярно	*MN* ср.отс. в Δ*PBC*	достатъчно е да е вярно	*MP = MC*	*N* среда на *BC*	
	p_3		p_2		
За да е вярно	*MP = MC*	достатъчно е да е вярно	Δ*AMP* ≅ Δ*DMC*		
	p_2		r	s	p_1
За да е вярно	Δ*AMP* ≅ Δ*DMC*	достатъчно е да е вярно	∢ *AMP*=∢ *DMC*	∢ *PAM*=∢ *CDM*	*MA = MD*
	p_1		p		
За да е вярно	*MA = MD*	достатъчно е да е вярно	*MN* средна основа в трапеца *ABCD*		

Така представено доказателството е ясно за учещите. Осъзнават причините за нужните допълнителни построения, кои съждения да използват и как да ги подредят. Математическите доказателства вече не им изглеждат толкова сложни и непостижими самостоятелно, благодарение на което мотивацията им за работа в областта на математиката се увеличава. Обучаваните започват да придобиват увереност в своите знания и възможности. По този начин те развиват евристичните си способности, умения та си да наблюдават и изследват. Учат се да не приемат наготово информацията, а винаги във всички области на научното познание да си задават въпроса „Защо това е така?" и да търсят отговора му. Учат се как да се аргументират, започват да търсят причинно-следствените връзки и в другите области. Разширяват уменията си да разрешават проблемни ситуации, защото откриването на доказателството на една теорема само по себе си е проблемна ситуация.

Болтянский в статията си „Анализ - поиск решения задачи" [1] изтъква значителната роля на направения на първия етап анализ на решенията на различни типове задачи и доказателства на теореми.

Съгласна съм, с изведените от Ив. Ганчев предимства на аналитичното доказателство по схемата на Пап:

- Естествено се получава началното съждение, от което следва съждението q , а това прави дейността целенасочена.
- Преходите в следващите стъпки са определени и не толкова многозначни
- Учениците имат по-големи възможности да разсъждават самостоятелно да конструират доказателства, тъй като е ограничена областта на търсене
- Естествено се комбинират евристичния метод и проблемния подход [3].

Областта на търсене се стеснява, ако учениците използват предварително създадени от самите тях, под ръководството на учителя **дидактически системи от теореми признаци и дидактически системи от теореми свойства** описани в методическите ръководства на проф. Иван Ганчев. В „Методика на обучението по математика" [3] са дадени примерните дидактически системи за понятието успоредни прави. Р. Исуфов в статията „Голяма идея – все още с малка популярност" подробно разработва тази идея [5]. Описано е как учениците още от 7$^{-ми}$ клас, да започнат създаването на тетрадка със систематизирани понятия или разработването на електронен вариант.

Идеята за създаването и използването на такива дидактически системи от признаци и свойства, е изключително полезна, защото обучаваните по-лесно осъзнават понятията, разбират връзките между тях, припомнят миналите знания. По този начин се осъществява трайно запаметяване на математическите понятия и теореми, и те биват успешно добавени в зоната на актуалното развитие на обучаваните (Виготски). Така знанията стават използваеми и учениците самостоятелно ги прилагат при доказателства и решаване на задачи. Според мен благодарение на тях учениците ще започнат да допускат значително по-малко „грешки дължащи се на неправилно приложение на теоремите или използване на несъществуващи теореми" [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Синтетичния метод за доказване е приложим единствено за учебните пособия. Ако доказателствата редовно се представят по този метод, остават неразбрани за голяма част от обучаваните. Те се демотивират и постепенно губят интерес към математиката.

Чрез аналитичния метод:

- доказателството е ясно за учещите;
- осъзнават се причините за нужните допълнителни построения;
- лесно се откриват необходимите съждения и тяхната подредба;
- математическите доказателства не изглеждат сложни и непостижими;
- увеличава се степента на мотивацията за работа;
- развиват се евристичните умения;
- овладяват се компетенции за проверка на конкретната информацията;

- овладяват се умения за откриване причинно-следствените връзки;
- овладяват се умения за аргументиране;
- овладяват се способности за вземане на решения при проблемни ситуации.

Схемата на Пап – схема на съвършен анализ е по-приложима в учебния час, защото отнема по-малко време в сравнение със схемата на Евклид.

С познаването на законите на логиката могат да се търсят различни варианти на доказателства, както и да се генерират задачи за пряко прилагане на теоремите с цел тяхното усвояване.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Болтянский,В.Г. Анализ - поиск решения задачи.Математика в школе,1974, №1

[2] Ганчев, Ив., Ю. Колягин, Й. Кучинов и др., Методика на обучението по математика от 8-ми до 11-ти клас Част 1.София, Модул-96, 1996.

[3] Ганчев, Ив., Ю. Нинова, В. Никова, Методика на обучението по математика. Благоевград, 2002.

[4] Гастева, С.А., Крельштейн, Б.И., Ляпин, С.Е., Методика на обучението по математика. София,Народна просвета, 1962.

[5] Исмаилова-Исуфова, Б., Р. Исуфов, Голяма идея - все още с малка популярност СМБ, 2010 http://www.minedu.government.bg/opencms/export/sites/mon/top_menu/general/educational_programs/7klas/mathematics_7kl-expanded.pdf

[6] Министерство на образованието и науката, Учебна програма по математика 7-ми клас. http://www.minedu.government.bg/opencms/export/sites/mon/top_menu/general/educational_programs/7klas/mathematics_7kl-expanded.pdf

[7] Пойа, Д., Как решат задачу. Москва, 1959.

[8] Успенски, В. А., Простейшие примеры математических доказательствв. Москва, Издательство Московского центра, 2012.

[9] Чичигин, В., Методика на обучението по геометрия. София, Народна просвета, 1964.

[10] Giannakoulias, E., E. Mastorides, D. Potari, and T. Zachariades, "Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims," The Journal of Mathematical Behavior, № 29, pp. 160-168, 2010

[11] Shuman, H., D. Green, Discovering geometry with a computer - using Cabri Geometer. Sweden,1994.

За контакти:

Десислава Маринова Георгиева Магистър по математика и информатика, Докторант при Факултет *Природни науки и образование*, Катедра *Математика*, Русенски университет "Ангел Кънчев", E-mail: dmgeorgieva@uni-ruse.bg

Ръководител: доц д-р Емилия Ангелова Великова, Факултет *Природни науки и образование*, Катедра *Математика*, Русенски университет "Ангел Кънчев", E-mail: evelikova@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран.