

## Числени резултати за функцията на тока $\psi$ при движението на флуид в цилиндричен реактор с механично разбъркване с две бъркалки за различни стойности на числото на Рейнолдс $Re$ в интервала $100 \leq Re \leq 1000$

Анна Лечева, Иванка Желева, Милен Неделчев

*Numerical results of stream function  $\psi$  for fluid motion in mechanical mixing cylindrical reactor with multiple mixers for different values of Reynolds number  $100 \leq Re \leq 1000$ : Numerical results of stream function  $\psi$  which describe hydrodynamic behavior of a viscous fluid in cylindrical reactor with multiple mixers is provided in present paper. The calculations are made with a computer program, written in MATLAB and approved in [6]. The fluid structure is described and the numerical results are graphically presented.*

**Key words:** Navier-Stokes equations, mechanical mixing, hydrodynamic characteristics of viscous fluid, stream function, Reynolds number

### ВЪВЕДЕНИЕ

Наличните енергийните ресурси в света в последно време намаляват съществено, а природата се замърсява от многобройните човешки дейности. Това налага сериозни изисквания и предизвикателства към съвременните промишлени технологии. Основен проблем в редица съвременни промишлености, например в химичната, биотехнологичната, хранително-вкусовата и други, е свързан с необходимостта от намаляване на енергийните разходи за производството на единица продукт.

Съществуват огромен брой научни публикации по усъвършенстването на апаратурата за химичен или микробиологичен синтез. Разработването на различни видове математически модели, описващи отделни стадии и аспекти от изучаваните процеси е от съществена важност. За да се усъвършенстват тези процеси е необходимо те да бъдат детайлно количествено изследвани.

За получаването на числените резултати за функцията на тока  $\psi$  при движението на флуид в цилиндричен реактор с механично разбъркване с две бъркалки за различни стойности на числото на Рейнолдс  $Re$  е използван програмен продукт, разработен и апробиран в [6]. Направен е параметричен анализ на няколко флуидни течения в зависимост от промяната на стойността на числото на Рейнолдс и височината, на която са поставени разбъркващите дискове. Изследвани са флуидни течения при стойности на числото на Рейнолдс в интервала  $100 \leq Re \leq 1000$ . Получените резултати са представени графично.

### ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА

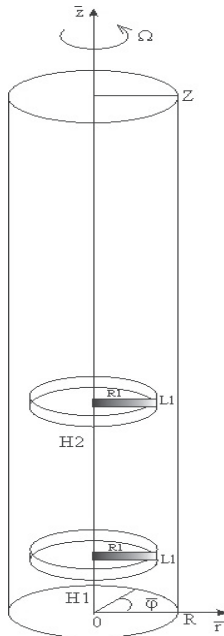
#### 1. Геометрична област - схема на биореактор с две бъркалки

Предполагаме, че реакторът с две бъркалки е прав кръгов цилиндър с радиус  $R$  и височина  $Z$ . В него по оста са разположени два еднакви диска с радиус  $R1$  и дебелина  $L1$  съответно на височина  $H1$  и  $H2$  от дъното на цилиндъра (Фиг.1). От съображения за удобство, въвеждаме цилиндрична координатна система  $(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{z})$ . Разбъркващите дискове се въртят с постоянно зададената ъглова скорост  $\Omega$ .

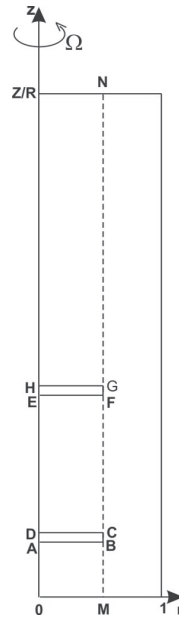
Предполагаме, че течението е ососиметрично, следователно, компонентите на скоростта са функции само на  $\bar{r}$  и  $\bar{z}$ . Поради осевата симетрия, разглеждаме само половината от осевото сечение на цилиндъра. Тогава геометричната област, в която се разглежда хидродинамиката изглежда така, както е показано на Фиг.2. В нея

имаме  $0 \leq r \leq 1$  и  $0 \leq z \leq Z/R$ . Бъркалките представляват областите ABCD и EFGH.

Изследваме движението в реактора достатъчно дълго време след като започне въртенето на бъркалките, т.е. разглеждаме установено течение.



Фиг.1 Схема на реактор с механично разбъркване с две бъркалки



Фиг. 2 Схема на изчислителната област в реактор с механично разбъркване с две бъркалки

## 2. Основни уравнения и гранични условия

За съществуване на механично подобие между теченията е необходимо да бъдат удовлетворени следните условия [7]: геометрично подобие, кинематично подобие и динамично подобие. Подобните течения се описват с еднакви системи диференциални уравнения, чиито решения предполагат тъждественост на безразмерните гранични и начални условия.

Движението на флуида в реактора се описва от уравненията на Навие-Стокс. Записани в безразмерна форма, в цилиндрична координатна система  $(r, \varphi, z)$  и след въвеждане на функцията на тока  $\psi$ , вихър на скоростта  $\omega$  и момент на тангенциалната скорост  $M$ , тези уравнения изглеждат по следния начин [4,5,6,9]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = -\omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + U \frac{\partial M}{\partial r} + W \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial r} + W \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial M^2}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial z} \right], \quad (3)$$

$$U = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad W = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (4)$$

където  $\vec{V}(U, V, W)$  е векторът на скоростта с неговите компоненти във въведената цилиндрична координатна система в безразмерен вид,  $M$  е моментът на тангенциалната скорост в безразмерен вид и  $\omega$  е ненулевата компонента на вектора вихър на скоростта в безразмерен вид.

За характерен линеен размер е избран радиусът  $R$  на цилиндъра, а за характерна скорост е избрана постоянно зададената ъгловата скорост  $\Omega$ , с която се въртят разбъркващите дискове. Всички параметри се обезразмеряват чрез въведения характерен линеен размер  $R$  и характерната скорост  $\Omega$  по следния начин:

$$r = \frac{\bar{r}}{R}, \quad z = \frac{\bar{z}}{R}, \quad U = \frac{\bar{U}}{\Omega R}, \quad W = \frac{\bar{W}}{\Omega R} \quad \text{и} \quad \text{Re} = \frac{\Omega R^2}{\nu}$$

е числото на Рейнолдс.

За коректната математическа формулировка на граничната задача е необходимо да се дефинират подходящи гранични условия за всички неизвестни функции [6,7,8]. Поставят се традиционните гранични условия за полепване на вискозния флуид върху твърдите стени на реактора. Върху неподвижните твърди стени се поставят нулеви гранични условия за компонентите на вектора на скоростта  $\vec{V}(U, V, W) = 0$ , а върху бъркалките скоростта на флуида съвпада със скоростта на въртящите се със зададената постоянна ъглова скорост  $\Omega$  бъркалки. На оста на симетрия се поставят условия за симетрия, които гарантират ограниченост на решението при  $r = 0$  [8].

## ЧИСЛЕНИ РЕЗУЛТАТИ

**Числени резултати за функцията на тока  $\psi$  при движението на флуид за различни стойности на числото на Рейнолдс  $\text{Re}$  в интервала  $100 \leq \text{Re} \leq 1000$**

Така поставената гранична задача за цилиндричен реактор с две бъркалки е много сложна нелинейна задача и за нея едва ли може да бъде намерено аналитично решение. Ето защо за нейното решаване е разработен ефективен числен алгоритъм, основан на крайни разлики [5]. Алгоритъмът е реализиран със специално разработен в средата MATLAB собствен програмен продукт [6].

Всички числени изследвания в настоящата статия са проведени в изчислителната област, показана на Фиг. 2. За да има добро разбъркване на флуида в реактора, геометричните параметри са избрани в съответствие със споменатите от Влаев [3]. Стойностите на параметрите на цилиндричния реактор от Фиг. 1 са дадени в Таблица 1 за всички изследвани положения на разбъркващите дискове.

**Таблица 1. Стойности на геометричните параметри на реактора при различна височина на поставяне на разбъркващите дискове от дъното на реактора**

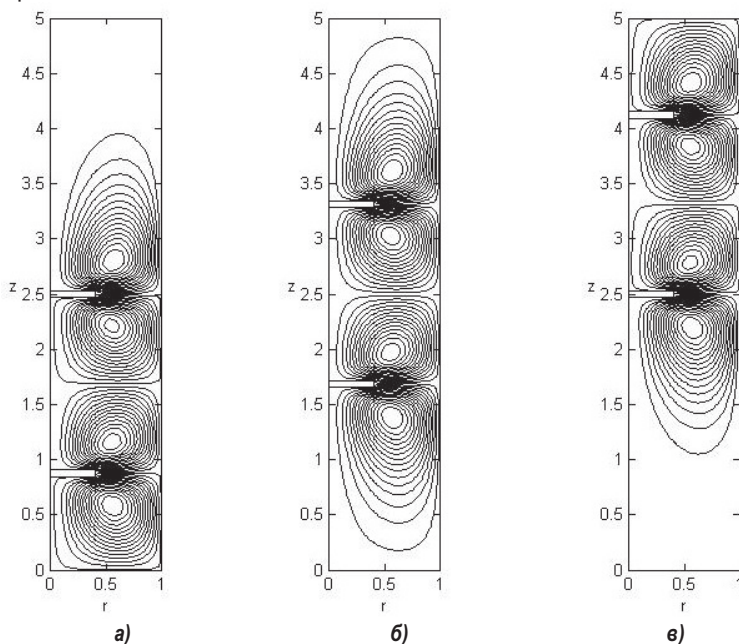
Означение на Фиг.1	Стойност при първо положение	Стойност при второ положение	Стойност при трето положение
R1	0.4	0.4	0.4
L1	0.0625	0.0625	0.0625
H1	0.84375	1.65625	2.46875
H2	2.46875	3.28125	4.09375

Изследвани са получените числени резултати за функцията на тока  $\psi$  за стойности на числото на Рейнолдс в интервала  $100 \leq Re \leq 1000$ .

При всички изследвани хидродинамични задачи с различни стойности на числото на Рейнолдс и с различно местоположение на бъркалките върху оста на реактора, се формират по 4 вихъра – един под първата бъркалка, непосредствено над дъното на реактора, два между бъркалките и един над втората бъркалка под капака на реактора [4,6,9]. Вихрите под съответните бъркалки се движат по посока на часовниковата стрелка, а вихрите над тях се движат в обратна посока. Посоката на въртене на циркулационните вихри не зависи нито от стойностите на числото на Рейнолдс, нито от местоположението на разбъркващите дискове върху оста на реактора. За всички изследвани хидродинамични задачи за различни стойности на числото на Рейнолдс в интервала  $100 \leq Re \leq 1000$  и за различните местоположения на бъркалките от Таблица 1, посоката на въртене остава същата.

Изолиниите на функцията на тока са представени графично на следващите Фиг.3, Фиг.4, Фиг.5, Фиг.6 и Фиг.7. Стойностите на числото на Рейнолдс в интервала  $100 \leq Re \leq 1000$  в разгледаните случаи съответно са следните:  $Re = 100$ ;  $Re = 250$ ;  $Re = 500$ ;  $Re = 750$ ;  $Re = 1000$ . На всички фигури по-долу, резултатите, означени с а), б) и в) съответстват на различните положения на разбъркващите дискове, посочени в Таблица 1.

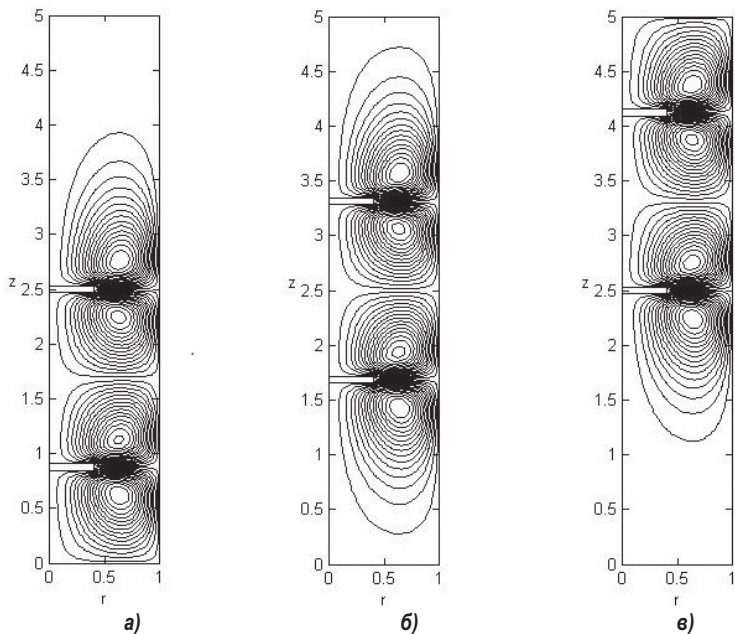
От графичното представяне на числените резултати следва, че характерът на течението е еднотипен за различните стойности на числото на Рейнолдс в интервала  $100 \leq Re \leq 1000$ . Предполагаме, че при тях движението на флуида е ламинарно.



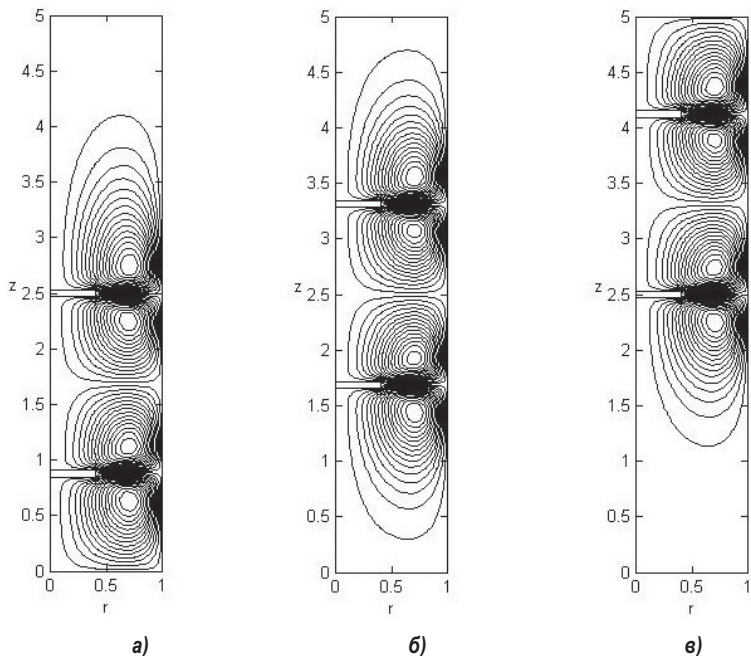
Фиг. 3 Линии на тока на флуидното движение при  $Re = 100$

Положителните стойности на функцията на тока се наблюдават под нивото на всеки разбъркващ диск, а отрицателните над него. Стойностите на изобразените на Фиг. 3, Фиг.4, Фиг.5, Фиг.6 и Фиг.7 изолинии на функцията на тока са еднакви както

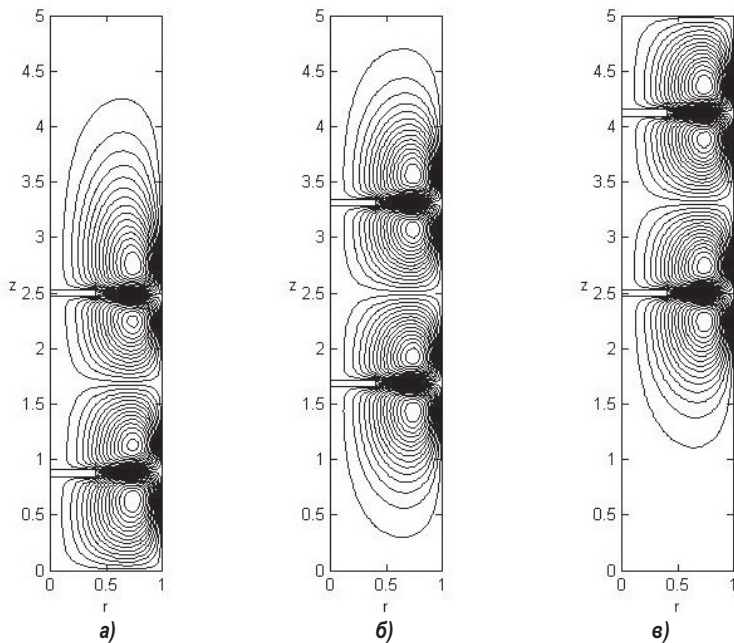
за различните числа на Рейнолдс, така и за различните положения на разбъркващите дискове.



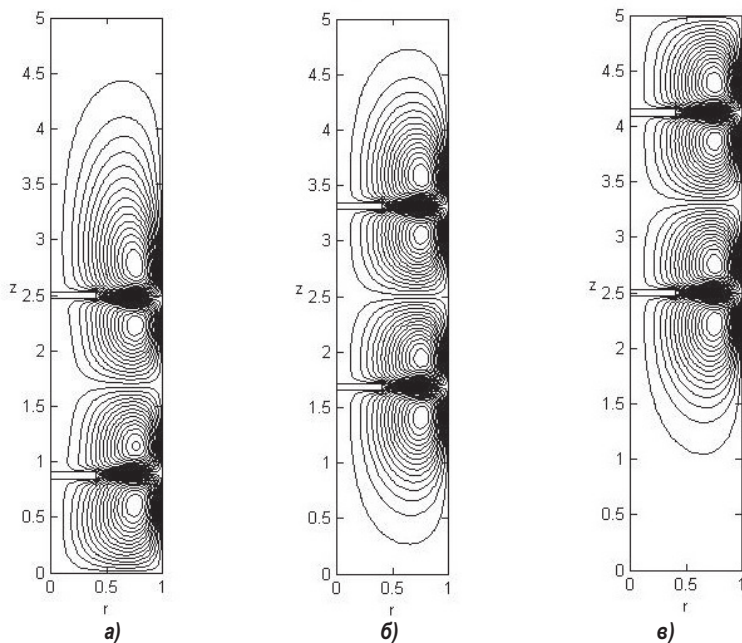
Фиг. 4 Линии на тока на флуидното движение при  $Re = 250$



Фиг. 5 Линии на тока на флуидното движение при  $Re = 500$



Фиг. 6 Линии на тока на флуидното движение при  $Re = 750$



Фиг. 7 Линии на тока на флуидното движение при  $Re = 1000$

При второто изследвано положение на бъркалките по оста на реактора от Таблица 1 и Фиг.3.б) – Фиг.7.б), се наблюдава симетрия на циркуляционните вихри спрямо нивото на средата на реактора  $Z/R = 2.5$ . Това предполага по-добро разбъркване на флуида в целия обем на реактора. В останалите два случая такава симетрия не се наблюдава. Тези резултати съответстват на резултатите, получени в [4], където са представени флуидни течения в реактори с един или три разбъркващи диска.

Изследвана е промяната на потока в зависимост от стойностите на числото на Рейнолдс. Потокът на флуида в реактора е преобладаващо радиален за разгледаните стойности на числото на Рейнолдс. Наблюдава се изместване в позициите на вихровите структури в направление  $r$ , т.е. с нарастване на числото на Рейнолдс, тези структури се приближават към стената на реактора.

От Фиг.3 до Фиг.7 лесно се забелязва, че с увеличаването на стойността на числото на Рейнолдс,  $Re = 100$ ;  $Re = 250$ ;  $Re = 500$ ;  $Re = 750$ ;  $Re = 1000$ , центровете на наблюдаваните циркуляционни структури на флуида се приближават към нивата на разбъркващите дискове и към вертикалната стена на реактора. Тези резултати са в добро съответствие с резултатите за случая на цилиндричен реактор с една бъркалка, получени в [6] Освен това, също така съответстват на тенденцията на поведението на флуида от експерименталните и изчислителните резултати, получени в [1,2].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получени са стационарни решения за ламинарно движение на флуид при различни стойности на числото на Рейнолдс  $Re = 100, 250, 500, 750, 1000$  в цилиндричен реактор с механично разбъркване, оборудван с две бъркалки с формата на диск. Направено е описание и е представена графично структурата на флуидния поток. Разработеният и апробиран в [6] програмен продукт е адекватен и с него в настоящата статия е изследвана хидродинамиката в цилиндричен реактор с две бъркалки. Получените резултати могат да се използват за подобряване на работата на подобни реактори в конкретни технологични производства.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bakker A., Van den Akker H.E.A., Single-phase flow in stirred reactors, Chemical engineering research and design, TranslChemE, Vol. 72, number A4, 1994, pp 583-593
- [2] Lamberto D. G., Alvarez M. M., Muzzio F. J., Experimental and computational investigation of the laminar flow structure in a stirred tank, Chemical Engineering Science 54, 1999, pp. 919-942
- [3] Влаев С. Д. Хидродинамика и масообмен в реактори с механично разбъркване и аерация – автореферат на дисертационен труд за присъждане на научната степен “Доктор на техническите науки”, 2003
- [4] Желева И., Лечева А., Изследване влиянието на разположението на бъркалките върху хидродинамиката в химически реактор с три бъркалки, Научни трудове РУ “А. Кънчев” 2001, Том 38, Серия 9, стр. 86 – 90
- [5] Желева И., Лечева А., Числен алгоритъм за изследване на хидродинамиката в реактор с три бъркалки, Научни трудове РУ “А. Кънчев” 2001, Том 38, Серия 10, стр. 250 – 256
- [6] Лечева А., Иванка Желева - научен ръководител, Числено изследване на хидродинамиката в цилиндрични реактори с механично разбъркване, Дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен „доктор“, Русе, 2013
- [7] Маджирски В. Хидродинамика, Техника, София, 1979

- [8] Роуч П., Вычислительная гидродинамика, Мир, Москва, 1980
- [9] Симеонов Иво, Иванка Желева и Анна Лечева – научни ръководители, Изследване на хидродинамиката в цилиндричен реактор с механично разбъркване с две бъркалки, Дипломна работа за получаване на образователно квалификационна степен “магистър”, Русе, 2014

**За контакти:**

гл. ас. д-р Анна Лечева, катедра *Математика*, Русенски университет “Ангел Кънчев”, e-mail: [alecheva@uni-ruse.bg](mailto:alecheva@uni-ruse.bg)

доц. д-р Иванка Желева, катедра *Топлотехника, хидравлика и екология*, Русенски университет “Ангел Кънчев”, e-mail: [izheleva@uni-ruse.bg](mailto:izheleva@uni-ruse.bg)

инж. Милен Неделчев, *Коника Минолта България ЕООД*, e-mail: [m.nedelchev74@gmail.com](mailto:m.nedelchev74@gmail.com)

**Докладът е рецензиран.**