

Ring-Shaped Plates with Linear–Step Variable Thickness with Axis-Symmetrical Load

Liliya Petrova

Ring-Shaped Plates with Linear – Step Variable Thickness with Axis-Symmetrical Load. It is investigate ring-shaped plates with linear variable thickness on the axis-symmetrical load with finite element method. The modelling of the plates is made as steplike with a constant jumpvariable thickness. It is used ring-shaped strip finite element with fourth degrees of freedom and a constant thickness. In a ring shape plate, simply supported into outside edge, are determined the displacements and forces. It is made an analysis of the results obtained.

Key words: ring-like strip bending finite element, jumpvariable thickness, circular plates, axis-symmetrical loading

ПОСТАНОВКА НА ИЗСЛЕДВАНЕТО

Цел на представената работа е да се извърши решение на плоча с линейно изменяща се дебелина в радиално направление. Такива плочи се прилагат в стоманобетонни и стоманени конструкции – резервоари, силози, бункери, цистерни и др.

Натоварването на плочата е ососиметрично. Предполага се, че при изменението си, най-толямата дебелина на плочата остава в границите, предписани за „тънка корава плоча”, т. е. изпълнено е условието

$$\frac{1}{80} \leq \frac{t}{\min R} \leq \frac{1}{5},$$

където t е дебелината, а R е минималният радиус на плочата.

Изследването на плочата да се извърши при предположение, че е с постоянна, стъпаловидно изменяща се дебелина.

Изследването на плочата да се извърши по метода на крайните елементи (МКЕ) с използване на ивичен пръстеновиден елемент. Моделът и основните зависимости на ивичен пръстеновиден елемент с постоянна дебелина са известни [2], [3] и др. Елементът е проверен и използван при пръстеновидни плочи с разнообразно подпрени краища. Изследвано е отношението $\frac{\lambda}{R_1}$ ширина на елемента

- вътрешен радиус на плочата за валидност на елемента при плочи с различни по големина вътрешни отвори, подпирани и натоварване.

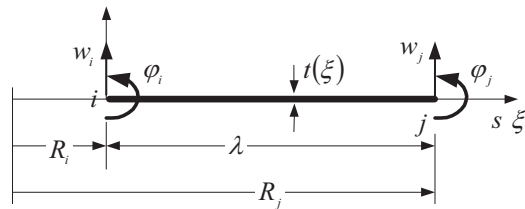
Изследването представлява преход към изследване на плочи с линейно изменяща се дебелина. Да се направи анализ и сравнение на получените резултати.

МОДЕЛ И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НА ПЛОЧАТА

Ивичен пръстеновиден елемент с четири степени на свобода и постоянна дебелина се прилага за изчисляване на пръстеновидни плочи. Векторът на възловите параметри на елемента съдържа нормалното преместване и завъртането на точките от възловете му линии

$$\{Z_i\}^T = \{w_i \quad \varphi_i \quad w_j \quad \varphi_j\}^T.$$

Схема на елемента с основните независими възлови параметри е показана на фиг. 1.

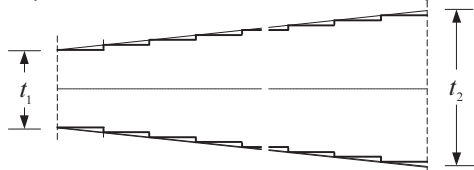


Фиг. 1 Схема на елемента и независими възлови параметри

Основните зависимости на елемента, функциите на формата, матрицата на коравина са известни, проверени и изследвани. Елементите на матрицата на коравина са изведени и в явен вид. Числовите стойности на елементите на матрицата на коравина са получени директно и чрез числено интегриране.

Получен е векторът на възловите сили на елемента при ососиметричен разпределен товар.

Средната равнина на елементите, с които е дискретизирана плочата, съвпада и формира средната равнина на плочата. Ексцентрицитет между възлите на отделните елементи не съществува. Дискретизационна мрежа в плочата се приема равномерна. Началният елемент от плочата е с минималната дебелина на плочата. Начинът на дискретизация на плочата е показан на фиг. 2.



Фиг. 2 Схема на дискретизация на плочата

Изменението дебелината на отделния елемент на стъпаловидната плоча се представя с израза $t(e) = t_1 + (e - 1)kt$, където kt е коефициент на линейно изменение на дебелината на плочата.

В общ случай плочата е с разнообразно подпрени краища. Опорните ръбове на плочата, приема се, съвпадат с възли от дискретизационната мрежа.

Съсредоточени сили и моменти по линия на плочата в радиално направление, приема се, действат във възлите от дискретизационната мрежа. Извънвъзлово натоварване в елементите на плочата не се отчита. Обобщените възлови сили формират директно вектора на обобщените възлови товари, действащи върху плочата.

Разпределението на товарите, действащи върху плочата, в общ случай, е по произволен закон. Всеки от типовете товари формира вектор на обобщените възлови сили на плочата, съответен на реакциите в пръстеновидния елемент при посредствено предаване на същите товари.

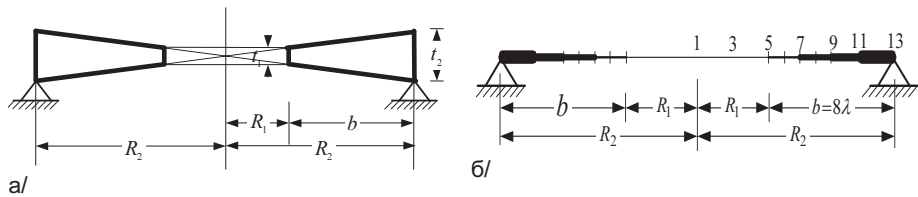
Постепенното съгъстяване на дискретизационната мрежа води към плоча с линейно изменяща се дебелина.

ЧИСЛЕНА РЕАЛИЗАЦИЯ

Модел на ивичния пръстеновиден елемент е приложен за изследване на кръгла плоча, със следните характеристики: модул на еластичността $E = 3.10^7 \frac{kN}{m^2}$;

коэффициент на Поасон $\nu=0,167$; радиусите на плочата са съответно $R_1 = 2,0 \text{ m}$ и $R_2 = 6,0 \text{ m}$. Плочата е свободно подпряна по външния си контур. Натоварена е с равномерно разпределен товар $q = 10 \frac{kN}{m}$. Дебелината на плочата се изменя линейно от $t_1 = 0,20 \text{ m}$ до $t_2 = 0,40 \text{ m}$.

Изчислителният модел и дискретизираната изчислителна схема на плочата са показани на фиг. 3.



Фиг. 3 Изчислителен модел и дискретизирана схема на плочата

Решението на плочата е извършено при използване на два, четири, осем, шестнадесет и повече елемента. Дискретизационната стъпка е равномерна. Резултатите за преместванията и усилията, получени от решението, са показани в табл.1.

Таблица 1

Сеч. №	Решение по МКЕ с ивичен пръстеновиден елемент									
	Премествания									
	Брой на ивичните елементи									
	n=2		n=4		n=8		n=16		n=128	
	$w_i(\rho)$	$\alpha_i(\rho)$	$w_i(\rho)$	$\alpha_i(\rho)$	$w_i(\rho)$	$\alpha_i(\rho)$	$w_i(\rho)$	$\alpha_i(\rho)$	$w_i(\rho)$	$\alpha_i(\rho)$
1-5	0,0252	-6,1352e-3	0,0194	-4,8465e-3	0,0171	-4,2992e-3	0,0160	4,0420e-3	0,0149	-3,7645e-3
5									0,0144	-3,7329e-3
9							0,0150	3,9892e-3	0,0140	-3,7139e-3
13									0,0135	-3,709e-3
17-6					0,0149	-4,2361e-3	0,0140	3,9752e-3	0,0130	-3,7002e-3
21									0,0126	-3,7009e-3
25							0,0130	3,9804e-3	0,0121	-3,7046e-3
29									0,0117	-3,7102e-3
33-7			0,0146	-4,8472e-3	0,0128	-4,2574e-3	0,0120	3,9935e-3	0,0112	-3,7168e-3
37									0,0107	-3,7239e-3
41							0,0110	4,0086e-3	0,0103	-3,7309e-3
45									9,7956e-3	-3,7375e-3
49-8					0,0107	-4,2869e-3	0,0100	4,0220e-3	9,3280e-3	-3,7435e-3
53									8,8598e-3	-3,7486e-3
57							9,0180e-3	4,0321e-3	8,3909e-3	-3,7529e-3
61									7,9216e-3	-3,7562e-3
65-9	0,0127	-6,4457e-3	9,6924e-3	-4,8974e-3	8,5266e-3	-4,3020e-3	8,0093e-3	4,0379e-3	7,4519e-3	-3,7585e-3
69									6,9820e-3	-3,7596e-3
73							6,9997e-3	4,0390e-3	6,5120e-3	-3,7596e-3
77									6,0422e-3	-3,7584e-3
81-10					6,3767e-3	-4,2977e-3	5,9904e-3	-4,0355e-3	5,5725e-3	-3,7560e-3

НАУЧНИ ТРУДОВЕ НА РУСЕНСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ - 2014, том 53, серия 2

85									5,1032e-3	-3,7525e-3
89							4,9825e-3	-4,0275e-3	4,6344e-3	-3,7479e-3
93									4,1663e-3	-3,7421e-3
97-11		4,8121e-3	-4,8613e-3	4,2333e-3	-4,2749e-3	3,9771e-3	-4,0153e-3	3,6989e-3	-3,7354e-3	
101									3,2325e-3	-3,7279e-3
105							2,9753e-3	-3,9991e-3	2,7670e-3	-3,7195e-3
109									2,3026e-3	-3,7104e-3
113-12				2,1053e-3	-4,2359e-3	1,9779e-3	-3,9794e-3	1,8394e-3	-3,7007e-3	
117									1,3775e-3	-3,6903e-3
121							9,8591e-4	-3,9564e-3	9,1686e-4	-3,6793e-3
125									4,5768e-4	-3,6676e-3
129-13	0,0000	-6,2626e-3	0,0000	-4,7565e-3	0,0000	-4,1836e-3	0,0000	-3,9304e-3	0,0000	-3,6552e-3

Таблица 1 (продължение)

Сеч. №	Решение по МКЕ с ивичен пръстеновиден елемент									
	Усилия									
	Брой на ивичните елементи									
	n=2		n=4		n=8		n=16		n=128	
	M_r	M_θ	M_r	M_θ	M_r	M_θ	M_r	M_θ	M_r	M_θ
1-5	-8,9887	-62,8535	-2,6923	-48,9145	-0,7701	-43,1209	-0,2091	-40,4547	-3,5058e-3	-37,6454
5									-2,1527	-38,4562
9							-4,1243	-39,6844	-3,9884	-39,8297
13									-5,5547	-41,3042
17-6					-7,2033	-42,2735	-6,9894	-42,88	-6,8906	-42,8620
21									-8,0264	-44,4895
25							-9,0748	-46,3618	-8,9852	-46,1754
29									-9,7857	-47,9111
33-7			-11,1408	-49,5753	-10,5501	-49,6853	-10,5422	-50,0515	-10,4428	-49,6892
37									-10,9716	-51,5042
41							-11,499	-53,8973	-11,3690	-53,3486
45									-11,6551	-55,2199
49-8					-11,9402	-57,7568	-12,0193	-57,8627	-11,8376	-57,1145
53									-11,9475	-59,0336
57							-12,1554	-61,9206	-11,9714	-60,9722
61									-11,9138	-62,9279
65-9	-13,9473	-72,8294	-12,0536	-67,2476	-11,8463	-66,2353	-11,9452	-66,0501	-11,7620	-64,8954
69									-11,4966	-66,8685
73							-11,4166	-70,2342	-11,1232	-68,8445
77									-10,6766	-70,8269
81-10					-10,5165	-74,9707	-10,5906	-74,4589	-10,1587	-72,8143
85									-9,5561	-74,8026
89							-9,4828	-78,7119	-8,8482	-76,7858
93									-8,0968	-78,7725
97-11			-8,4235	-86,3283	-8,0895	-83,859	-8,1054	-82,9825	-7,4100	-80,7816
101									-6,6746	-82,7948
105							-6,4678	-87,2612	-5,9011	-84,8127
109									-5,1189	-86,8401
113-12					-4,646	-92,819	-4,5772	-91,5391	-4,2956	-88,8713
117									-3,3842	-90,8972
121							-2,4391	-95,808	-2,3895	-92,9168
125									-1,2298	-94,9141
129-13	-3,6520	-71,0637	-0,9254	-85,1282	-0,2305	-91,9636	-0,0574	-95,2992	-3,0495e-4	-96,3339

На границата между отделните елементи скоковете в резултатите за преместванията и усилията се усредняват.

АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Използването и проверката на ивичния пръстеновиден елемент при плочи с постоянна дебелина, обуславя достоверността на получените резултати за преместванията и усилията в изследването на пръстеновидните плочи със стъпаловидно напречно сечение. Анализът на получените резултати показва, че сходимостта на преместванията и усилията при използване на различен брой елементи е приемлива. При зададената геометрия на плочата и съотношението дискретизационна стъпка – радиус на плочата в случай на използване на $n=16, \dots, 128$ крайни елемента отношенията дебелина – минимален радиус на плочата $\frac{t}{\min R}$ остават в границите, съответни на предпоставката за тънка корава

плоча. Увеличаването на броя на крайните елементи намалява силно размерите на напречното сечение на ивичния пръстеновиден елемент. Използваната дискретизация с най-голям брой елементи съответства на отношение дебелина – ширина на елемента – $\frac{t}{\lambda} \in (1,25 - 0,65)$. В някои от тези случаи по геометрията си

елемента се приближава до ососиметричен огъвен затворен криволинеен гредови елемент със степени на свобода и независими възлови параметри на ивичния плочов елемент. В границите на съотношението на размерите на напречното сечение, известни за гредови системи, независимо от геометрията си, прилагането на елемента уточнява получените резултати за преместванията и усилията в плочата. Налице е сходимост на преместванията и усилията. Уточняването на резултатите за преместванията и усилията в стъпаловидни плочи налага съгъстяване на дискретизационната стъпка, особено в зоната около възлите. Отчитането на действителните стойности на преместванията и усилията съответно влияе на сравнимостта на резултатите за тези величини. Отчитането им налага изследване на стъпаловидната плоча при използване на неравномерна дискретизационна стъпка. Сравнимостта на резултатите за преместванията и усилията се съгласува частично с действителните стойности на преместванията и усилията в пръстеновидната плоча с скокообразно и линейно изменяща се дебелина.

Сравнимостта на резултатите в плоча със стъпаловидно и линейно изменение на дебелината в радиално направление, предполага се, в общ случай, зависи от геометрията, материала и подпирането на плочата.

Силно съгъстяване на дискретизационна стъпка доближава моделите на плочата със стъпаловидно и линейно изменение на дебелината, съответно резултатите за преместванията и усилията в двата модела.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Банков Б., Ю. Павлова, Метод на крайните елементи в строителната механика, УАСГ, София, 1996.
- [2]. М. Секулович, Метод конечных элементов, Стройиздат, Москва, 1993.
- [3]. Л. Петрова, Диапазон на използване на пръстеновиден краен елемент с четири степени на свобода при ососиметрично натоварени плочи, сп. „Пътища”, София, 2005.
- [4]. Timoshenko S. P., S. Voinovski-Kriger, Plates and Shells, Moscow, 1966.

За контакти:

Доц. д-р инж. мат. Лилия Петрова, Кат. “Механика”, ВТУ “Т. Каблешков”, 158 “Гео Милев”, София 1574, България, тел. 359 887343135, e-mail: lbphr@abv.com

Докладът е рецензиран.