Един метод на крайните елементи за параболични задачи с прекъснати коефициенти и наличие на локален източник

Иван Георгиев

Abstract: *In this work a parabolic problem with localized reaction term is considered. Numerical method based on the immersed interface method of finite elements is adapted an applied for this problem. For discretization in time explicit numerical scheme is used. The standard basis functions are modified near the interface in such a way that they satisfy the jump conditions on the interface. Convergence of the method is discussed and numerical experiments, confirming second order of accuracy in space and first order in time are shown.*

Key words: *immersed interface method, FEM, parabolic problem, localized reactions*

Въведение

Нека да разгледаме следната по-обща задача:

$$u_t(x,t) - (\beta u_x(x,t))_x + q(u) = f(x,t) - g(u(x,t))\delta(x-\zeta) \;\; в \;\; \Omega = (0,1)\times(0,1) \qquad (1)$$

с начални и гранични условия

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u_0(x), \\ &u(0,t) = u_L(t),\; u(1,t) = u_R(t). \end{aligned} \qquad (2)$$

Функциите q, f и g са навсякъде непрекъснати, а β е непрекъсната по части:

$$\beta = \begin{cases} \beta^-(x), & 0 \le x \le \zeta, \\ \beta^+(x), & \zeta \le x \le 1. \end{cases}$$

Задача (1) с условия (2) може да се представи в следния вид:

$$u_t(x,t) - (\beta u_x(x,t))_x + q(u) = f(x,t) \;\; в \;\; \Omega = (0,1)\times(0,1) \qquad (3)$$

с начални и гранични условия

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u_0(x), \\ &u(0,t) = u_L(t),\; u(1,t) = u_R(t), \end{aligned} \qquad (4)$$

и условия за скок на решението и на потока

$$\begin{aligned} &[u(x,t)]_{x=\zeta} = u(\zeta^+,t) - u(\zeta^-,t) = 0, \\ &[\beta u_x(x,t)]_{x=\zeta} = \beta^+ u_x(\zeta^+,t) - \beta^- u_x(\zeta^-,t) = g(u(\zeta,t)). \end{aligned} \qquad (5)$$

Задача (3) при условия (4) и (5) има следните особености:

1) β е частично-непрекъсната, като търпи прекъсване от първи род в интерфейсната точка ζ

2) в общия случай q е нелинейна функция което води до разглеждане на нелинейна параболична задача

3) функцията g в общия случай също е нелинейна, което води до нелинеен скок на потока.

Елиптична задача с прекъснати коефициенти е решена с метод на крайните елементи (МКЕ) в [8, 10]. Аналогична задача, но с условия за скока, зависещи от решението, е разгледана в [3, 4]. Параболична задача с подвижен интерфейс е решена числено с метода на диференчните схеми в [6]. Елиптико-параболична задача е разгледана от [7] и решена с МКЕ. Друг вариант на МКЕ е приложен и за хиперболична задача с подвижен интерфейс, произтичаща от механиката, е обсъден в [2].

В настоящата статия се разглежда параболична задача с прекъснати коефициенти и наличие на линеен източник. Разработен е вложен интерфейсен метод на крайните елементи. Първо се дискретизира времевата променлива по метод на Роте [10], след което на всеки слой по времето се конструират модифицирани базисни функции [9].

Математическа постановка на проблема

Непосредственото решаване на (3) е по-сложно, затова в тази статия ще разгледаме следния частен случай:

$$u_t(x,t) - (\beta u_x(x,t))_x + q(x,t)u = f(x,t) \text{ в } \Omega = (0,1)\times(0,1) \tag{6}$$

с начални и гранични условия

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u_0(x), \\ &u(0,t) = u_L(t),\ u(1,t) = u_R(t) \end{aligned} \tag{7}$$

с нулев скок на решението и скок на потока зависещ линейно от решението:

$$\begin{aligned} &[u(x,t)]_{x=\zeta} = u(\zeta^+,t) - u(\zeta^-,t) = 0 \\ &[\beta u_x(x,t)]_{x=\zeta} = \beta^+ u_x(\zeta^+,t) - \beta^- u_x(\zeta^-,t) = K(t)u(\zeta,t). \end{aligned} \tag{8}$$

Тук β е непрекъсната по части функция

$$\beta = \begin{cases} \beta^-(x), & 0 \le x < \zeta, \\ \beta^+(x), & \zeta < x \le 1, \end{cases}$$

а $K(t) > 0,\ \forall t \in [0,1]$ е произволна непрекъсната функция.

Слаба формулировка на проблема

Нека в соболево пространство $u \in L^2(0,1;H^1(0,1))$ са въведени формите:

$$a(u,v) = \int_0^1 (\beta(x)u_x{}'(x,t)v'(x) + q(x)u(x,t)v(x)dx + K(t)u(\zeta,t)v(\zeta) \tag{9}$$

и

$$b(f,v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{10}$$

С $(u_t(x,t),v) = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx$ означаваме скаларно произведение в $L^2(0,1)$.

Решението на (6)-(8) ще бъде функцията $u \in L^2(0,1;H^1(0,1))$, такава че

$$(u_t,v) + a(u,v) = b(f,v) \qquad \forall v \in H^1(0,1), \tag{11}$$

и $u(x,t)$ удовлетворява условия (7) и (8).

Използвайки енергетичния метод, в [1] е доказано, че ако $q, f \in L^1(0,1),$ тогава задача (6)-(8) има единствено решение $u \in L^2(0,1;H^1(0,1))$ и $u_x \in L^2(0,1;H^{-1}(0,1)).$

Rothe's FE-IIM

Нека в интервала $[0,1]$ въведем равномерна мрежа от възли по променливата $t,$ с постоянна стъпка $\tau = 1/M,$ и $t_m = m\tau,\ m = 0...M$. Нека със $z_m(x)$ означим численото приближение на $u(x,t_m)$ в m-тия слой на времето, $m = 1...M.$ Тези приближения са определени итеративно чрез:

$$\frac{z_m(x) - z_{m-1}(x)}{\tau} - (\beta z_m'(x))' + q(x)z_m(x) = f(x,t_m) - \delta(x-\zeta)K(t_m)z_m(x), \quad x \in (0,1) \tag{12}$$

началните и гранични условия

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u_0(x) = z_0(x), \\ &u(0,t_m) = u_L(t_m) = z_m(0),\ u(1,t_m) = u_B(t_m) = z_m(1), \end{aligned} \tag{13}$$

и условия за скока на функцията и на потока

$$\begin{aligned}&[u(x,t_m)]_{x=\zeta} = u(\zeta^+,t_m) - u(\zeta^-,t_m) = z_m(\zeta^+) - z_m(\zeta^-) = 0,\\ &[\beta u_x(x,t_m)]_{x=\zeta} = \beta^+ u_x(\zeta^+,t_m) - \beta^- u_x(\zeta^-,t_m) = K(t_m)u(\zeta,t_m) = \\ &\beta^+ \frac{\partial z_m}{\partial x}(\zeta+) - \beta^- \frac{\partial z_m}{\partial x}(\zeta-) = K(t_m)z_m(\zeta).\end{aligned} \tag{14}$$

Тогава (12)-(14) може да запишем като:

$$-(\beta z_m'(x))' + (\frac{1}{\tau} + q(x))z_m(x) = f(x,t_m) + \frac{z_{m-1}(x)}{\tau} - \delta(x-\zeta)K(t_m)z_m(x), \quad m = 1...M \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&z_0(x) = u_0(x),\\ &z_m(0) = u_L(t_m),\ z_m(1) = u_B(t_m),\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&[z_m(x)]_{x=\zeta} = z_m(\zeta^+) - z_m(\zeta^-) = 0,\\ &[\beta z'_m(x)]_{x=\zeta} = \beta^+ \frac{\partial z_m}{\partial x}(\zeta+) - \beta^- \frac{\partial z_m}{\partial x}(\zeta-) = K(t_m)z_m(\zeta).\end{aligned} \tag{17}$$

Сега за всеки слой $m = 1,...,M$ по времето t сме в състояние да приложим теорията [4] с прекъснати коефициенти и скок на потока зависещ линейно от решението. Въвеждаме равномерна мрежа от възли по x, $x_i = ih,\ i = 0..N,$ където $x_0 = 0,\ x_N = 1$ и $h = 1/N$. Нека $x_J \le \zeta \le x_{J+1}$ тогава численото решение за всеки слой по времето $z_m^h(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i^m \phi_i(x)$ е линейна комбинация на стандартни базисни функции ϕ_i, където

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h},\ x_{i-1} \le x < x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h},\ x_i \le x \le x_{i+1} \end{cases},\ i \ne J,\ i \ne J+1$$

и двете модифицирани базисни функции ϕ_J и ϕ_{J+1}, разгледани в [4].

Комбинирайки резултатите, получени в [1, 4], стигаме до следната теорема:

***Теорема*:** За численото решение z_m^h на задача (1)-(5) е в сила оценката:

$$\| z_m^h(x) - u(x,t_m) \|_\infty \le C(h^2 + \tau), \tag{18}$$

където C е константа независеща от h и τ.

Числен експеримент

За тестов пример вземаме следната задача:

$$u_t(x,t) - (\beta u_x(x,t))_x = -\delta(x-\zeta)Ku(x,t) \ \text{в}\ \Omega = (0,1)\times(0,1) \tag{19}$$

с начални и гранични условия

$$\begin{aligned}&u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x/\sqrt{\beta^-})}{\cos(\zeta/\sqrt{\beta^-})},\ 0 \le x \le \zeta \\ \dfrac{\sin(x/\sqrt{\beta^+})}{\sin(\zeta/\sqrt{\beta^+})},\ \zeta < x \le 1 \end{cases}\\ &u(0,t) = u_L(t) = \frac{\exp(-t)}{\cos(\zeta/\sqrt{\beta^-})},\ u(1,t) = u_R(t) = \frac{\sin(1/\sqrt{\beta^+})\exp(-t)}{\sin(\zeta/\sqrt{\beta^+})},\end{aligned} \tag{20}$$

където

$\beta(x)=\begin{cases}\beta^-, & 0\le x<\zeta\\ \beta^+, & \zeta<x\le 1\end{cases}$, а β^- и β^+ са константи.

За конкретната задача $K(t)$ е константа имаща вида:

$$K=\sqrt{\beta^+}ctg(\frac{\zeta}{\sqrt{\beta^+}})+\sqrt{\beta^-}tg(\frac{\zeta}{\sqrt{\beta^-}}).$$

Условията за скок на решението и на потока са:

$$\begin{aligned}&[u(x,t)]_{x=\zeta}=u(\zeta^+,t)-u(\zeta^-,t)=0,\\ &[\beta u_x(x,t)]_{x=\zeta}=\beta^+u_x(\zeta^+,t)-\beta^-u_x(\zeta^-,t)=K(t)u(\zeta,t)=Ku(\zeta,t).\end{aligned} \tag{21}$$

Точното решение е:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x/\sqrt{\beta^-})}{\cos(\zeta/\sqrt{\beta^-})}\exp(-t), & 0\le x\le\zeta\\ \dfrac{\sin(x/\sqrt{\beta^+})}{\sin(\zeta/\sqrt{\beta^+})}\exp(-t), & \zeta<x\le 1\end{cases}. \tag{22}$$

В табл. 1 са представени резултатите при конкретни стойности на $\beta^{\pm},\zeta$ и K. Грешката на численото решение в максимална норма при N възела по пространсвената и M възела по времето е означена с $\| er_N^M \|_\infty = \max(|u(x_i,t_m)-z_m^h|)$,

а редът на сходимост - с $rate=\log_2(\dfrac{\| er_N^M \|_\infty}{\| er_{2N}^{4M} \|_\infty})$.

Фактът, че $rate$ е около две, потвърждава теоретичния резултат за втори ред на сходимост по пространствената променлива x и първи ред на сходимост по времевата променлива t.

Таблица 1. Грешка на численото решение и скорост на сходимост

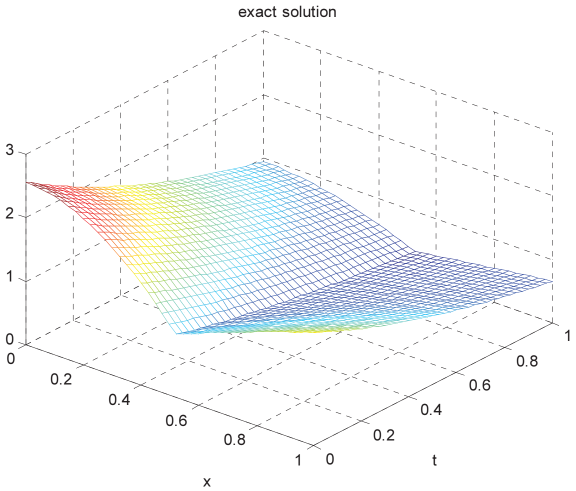
$\zeta=\frac{\pi}{6},\ \beta^+=1.9,\ \beta^-=0.2,\ K=\sqrt{\beta^+}ctg(\frac{\zeta}{\sqrt{\beta^+}})+\sqrt{\beta^-}tg(\frac{\zeta}{\sqrt{\beta^-}})\approx 4.51028$			
N	M	$\| er_N^M \|_\infty$	$rate$
5	5	0.020221005128805	-
10	20	0.005628041509760	1.8451
20	80	0.001474247504065	1.9326
40	320	0.000371110609782	1.9901
80	1280	0.000093104152713	1.9949
160	5120	0.000023286576671	1.9993

На фиг. 1 и фиг. 2 са дадени съответно графиката на точното решение и графиката на грешката в максимална норма между точното и численото решение.

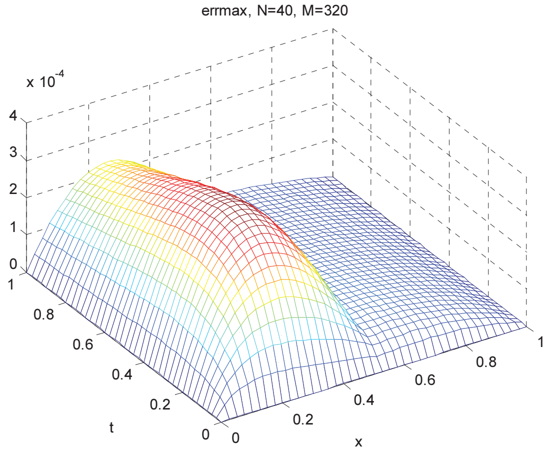
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен е модифициран числен метод на база МКЕ за решаване на параболична задача с прекъснати коефициенти и наличие на линеен локален източник с грешка $O(h^2)$ по пространството и $O(\tau)$ по времето.

В близко бъдеще от интерес е разглеждането на аналогична задача с подвижен локален източник, както и двумерен вариант на задача с прекъснати коефициенти.



Фигура 1. Точно решение



Фигура 2. Грешка на решението при $N = 40,\ M = 320.$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Al-Droubi A., M. Renardy Energy methods for a parabolic-hyperbolic interface
[2] problem arising in electromagnetism. J. Appl. Math. Phys. , 1988, 39, 931—936.
[3] Georgiev I., J. Kandilarov. An Immersed Interface FEM for 1D Elastic Continuum Vibrations Under a Traveling Load. IN: American Institute of Physics CP V. 1301, New York,USA, 2010, pp. 379-386
[4] Georgiev I., J. Kandilarov. Immersed FEM for Elliptic Interface Problems with Non-homogeneous Jump Condition of Special Type. IN: Scientific Conference of University of Rousse, 2011, University of Rousse, 2011

[5] Georgiev I., J. Kandilarov. An immersed interface FEM for elliptic problems with local own sources. IN: American Institute of Physics CP series 1186, New York, USA, 2009, pp. 335-342

[6] *J.D. Kandilarov, L.G. Vulkov, The immersed interface method for two-dimensional heat-diffusion equation with singular own sources, Appl. Num. Math.,* V 57 (5-7) (2007) 486-497.

[7] Kandilarov, J.D. The immersed interface method for reaction-diffusion equation with a moving concentrated source.// Lect. Notes in Com. Sci., Springer, 2003, No V. 2542, pp. 506-513 (*Impact factor: 0.515 /2003, Journal of Impact Factor for 2003*)

[8] Kandilarov, J. Numerical Solution of a Nonlinear Parabolic-Elliptic Interface Problem. IN: Proceedings of the International Workshop New Trends in Approximation, Optimization and Classification NTAOC'08, Sibiu, Romania, "Lucian Blaga" University Press, 2008, pp. 32-40

[9] K. Zlateva, A FEM for singularly perturbed diffusion problems with discontinuous coefficients and concentrated factors. Analytical and Numerical Methods for Convection-Dominated and Singularly Perturbed Problems, *NOVA Science Publishers*, Inc., Huntington, NY, 2000, 265-271

[10] Li Z. The immersed interface method using a finite element formulation. *Appl. Num. Math.*, 1998, 27/3, 253-267.

[11] Rektorys K. The method of discretization in time. SNTL, Prague, 1982.

За контакти:

Иван Радославов Георгиев, Катедра "Приложна математика и статистика", Русенски университет "Ангел Кънчев", тел.: 082-888 424, e-mail: irgeorgiev@uni-ruse.bg