Частично рекурсивни функции върху азбуки

Илияна Раева

Abstract: Partially Recursive Functions of Alphabets: *The paper presents a method for assigning of partially recursive functions of alphabets. Based upon analogical approach concerning the main calculation operations with number functions, the following operations are determined: superposition, recursion and minimization. The presented approach can be applied for computer systems dealing with recursion and processing natural languages.*

***Key words**: recursion function, partially recursion, prime recursion, minimization, alphabet.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Теорията на рекурсивните функции е в основата на понятието алгориъм. Съществуват някои основни техники за дефиниране на рекурсивни функции и на структури от данни. Известни са алгоритмите за рекурсивно дефиниране на понятия като факториел, ред на Фибоначи, най-голям общ делител, трансформация на Фурие. Рекурсивните решения са удобни за приложение в теорията на игрите (напр.шах и др.) – решавайки проблема със серия рекурсивни извиквания.

В съвременните алгоритмични теории, рекурсията се използва за представяне на сложни алгоритми в компактна форма без да се намалява ефективността. По този начин отпада необходимостта от локални променливи и разходи за рекурсивната реализация.

Използваните рекурсивни функции трябва да удовлетворяват две свойства:

- да решават основния проблем;
- всяко рекурсивно извикване да включва по-малка стойност на аргументите.

В настоящия доклад е представен математически модел за изчисляване на частично рекурсивни функции по алгоритмичната схема на задаване на примитивна рекурсия. Моделът е разработен в термините на класическата теория за рекурсивните функции и логиката на предикатите. На базата на получената схема е направено приложение в теорията на формалните езици. Крайната цел на това представяне е прилагане на модела в машини на Тюринг [1].

I. Алгоритъм за изчисляване на частично рекурсивни функции

Дадени са следните функции на целочислени променливи:

$f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, …, $f_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Дефинираме функцията $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ като суперпозиция на функциите $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, …, $f_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ чрез равенството:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_n(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Очевидно е, че ако всички тези функции са навсякъде определени, то и F(x) е навсякъде определена. Функцията F(x) ще бъде частично определена ако поне една от тези функции е частично определена. В случаите, когато не всички функции f_1, f_2, …, f_n зависят от n променливи $x_1, x_2, ..., x_n$, за получаване на суперпозиция използваме фиктивни аргументи и функцията $G_n^m(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Основни схеми за задаване на рекурсия [2]

<u>**Схема 1**</u> (примитивна рекурсия)

Дадени са функциите $\varphi(x_2, ..., x_n)$ и $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ (n>0).

Дефинирме нова функция;

$$\begin{cases} f(0,x_2,x_3,...,x_n)=\varphi(x_2,x_3,...,x_n) \\ f(y+1,x_2,x_3,...,x_n)=F(y,f(y,x_2,...,x_3),x_2,x_3,...,x_n) \end{cases} \quad (1)$$

$F(x_1,x_2,...,x_n)$ зависи от n +1 променливи, f зависи от n променливи, $\varphi(x_2,...,x_n)$ зависи от n-1 променливи.

♦ Функцията f е получена от функциите $\varphi(x_2,...,x_n)$ и $F(x_1,x_2,...,x_n)$ (n>0) чрез примитивна рекурсия, ако тя е дефинирана по схема (1).

Изчислимост на функцията f:

Нека $x_1=a_1, x_2=a_2,.., x_n=a_n$. Тогава

$$f(0,a_2,a_3,...,a_n)=\varphi(a_2,a_3,...,a_n)=b_0$$
$$f(1,a_2,a_3,...,a_n)=F(0,f(0,a_2,a_3,...,a_n),a_2,...,a_n)=F(0,b_0,a_2,...,a_n)=b_1$$
$$f(2,a_2,a_3,...,a_n)=F(1,f(1,a_2,a_3,...,a_n),a_2,...,a_n)=F(1,b_1,a_2,...,a_n)=b_2$$

....

<u>Схема 2</u> (обратима рекурсия)

Дадени са функциите $\varphi(x_2,...,x_n)$ и $F(y,y_1,y_2,...,y_n,x_2,...,x_n)$ (n>0).

$$\begin{cases} f(0,x_2,x_3,...,x_n)=\varphi(x_2,x_3,...,x_n) \\ f(y+1,x_2,x_3,...,x_n)=F(y,f(a_1(y+1),x_2,...,x_n),...f(a_3,(y+1),x_2,x_3,...,x_n),x_2,x_3,...,x_n \end{cases} \quad (2)$$

където $a_1(y+1)\le y,\ a_2(y+1)\le y,\ a_n(y+1)\le y,$

♦ Функцията $f(y,x_2,...,x_n)$ е получена от функциите $\varphi(x_2,...,x_n)$ и $F(y,y_1,y_2,...,y_n,x_2,...,x_n)$ чрез обратима рекурсия, ако тя е дефинирана по схема (2).

<u>Схема 3</u> (итерация)

Функцията f(x) е получена чрез итерация ако:

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x+1)=g(f(x)) \end{cases} \quad (3)$$

♦ Функцията $f(y,x_2,...,x_n)$ е получена чрез итерация, ако тя е дефинирана по схема (2).

Дефиниция 1: Функцията $f(y,x_2,...,x_n)$ се нарича частично рекурсивна, ако може да бъде получена след краен брой стъпки от по-прости функции чрез операциите суперпозиция, схема за примитивна рекурсия или минимизация.

II. Понятието рекурсия над множества с елементи от дадена азбука.

С помощта на понятието рекурсия могат да се опишат клас от алгоритми от теорията на формалните езици.

Нека V={a_1, a_2, …, a_p} е крайно множество от символи, наречено „азбука“. Всяка крайна последователност от букви от азбуката се нарича дума. Ако a и b са две думи от азбуката, то думата „ab“ се нарича композиция (конкатенация) на думите a и b. С V* се означава множеството от всички думи над азбуката V.

Известна е класическата номерация на думите от даден език:

$\wedge$ (празната дума) е с номер 0;

С числата от 1 до p се номерират буквите от азбуката V;

Произволна дума от V*, a=$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_k}$ има номер c(a)=$i_0+i_1p+i_2p^3+...+i_kp^k$

1. Основни дефиниции и понятия [2]:

- Множеството от думи М над азбуката V се нарича примитивно рекурсивно, ако на номерата на всички думи от М може да се съпостави примитивно рекурсивна зависимост.
- Казва се, че над азбукта V е зададена функция F от думи над V, ако на всяка произволна n-торка $\alpha_1\alpha_2,...,\alpha_n$ от V* се съпоставя еднозначно определена дума F($\alpha_1\alpha_2,...,\alpha_n$) от V.
- Функцията f се нарича представител на функцията F в номерацията К, ако $F(Kx_1, Kx_2,..., Kx_n) = Kf(x_1, x_2,..., x_n)$ за всички естествени $x_1, x_2,..., x_n$ и следователно $F(\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n) = Kf(c_1\alpha_1, c_2\alpha_2,..., c_n\alpha_n)$ или $f(x_1, x_2,..., x_n) = c(F(Kx_1, Kx_2,..., Kx_n)$ където К е първоначалната номерация на азбучните символи. В случая c(a) е номер на думата a, Kx_1 е дума с номер x_1 в номерация К.

2. Намиране на числова функция, представител на функцията F от думи над множество V*.

Дадена е азбуката V={A, B. C}.

2.1 Намиране на числовата функция представляваща функцията $F_1(\alpha)$ =αA

В съответствие с въведените определения

$f_1(x)=c(F_1(Kx))=c(Kx,A) = c(\alpha,A)=1+pc(a)$

Да разгледаме думата α= ACBAB, α.A=ACBAB.A

$c(\alpha.a)=1p^0+2p^1+1p^2+2p^3+3p^4+1p^5 = 1+c(a)$, p=3

То $f_1(x)=1+px=1+3x$ е числовата функция, представляваща функцията $F_1(\alpha)=\alpha.A$

2.2 Намиране на числовата функция представляваща функцията $F_2(\alpha)$ =Aα

Ако $F_2(\alpha)$ =Aα, то $f_2(x)$ $c(F_2(Kx))=c(A.Kx)$

$c(F_2(\alpha)=c(\alpha^1\alpha)=c(A.\alpha)=c(A.ACBAB)=c(\alpha)+1.p^{s+1} = c(\alpha)+1.p^5$

Тогава $f_2(x)=x+3^5$ е числовата функция представляваща функцията $F_2(\alpha)$=A .α

Свойството рекурсивност на функциите дефинирани върху азбуки е свързано с рекурсивността на номерата на думите от множествата върху тази азбука.

Теорема. Функцията $F(\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$ над V* е частично рекурсивна тогава и само тогава, когато е получена след прилагането на краен брой пъти на числовите операции суперпозиция, рекурсия над думи, минимизация.

2.3 Определяне на примитивна рекурсия за функции над множества от думи

Схемата за задаване на представляващата функция f , от функциите g(x) и частните функции над V* $h_1, h_2, \dots, h_n$ е следната:

$$\begin{cases} f(x_1x_2,...,0) = g(x_1, x_2,..., x_n) \\ f(x_1, x_{2,},..., x_n, py+1) = h_i(x_1, x_2,..., x_n, y, f(_1, x_2,..., x_n, y)), i = 1,2,...n \end{cases} \quad (3)$$

3. Рекурсивно определяне на елемента α_2, за функцията $F(\alpha_1, \alpha_2)$ над азбуката V={A,B,C,D}

В азбуката {A,B,C,D] да разгледаме функцията $F(\alpha_1, \alpha_2)$ и да определим рекурсивно втория елемент α_2. Нека функцията е определена по следния начин:

$$\begin{cases} F(\alpha_1.\wedge) = G(\alpha_1) \\ F(\alpha_1, \beta.A) = H_1(\alpha_1, \beta, F(\alpha_1, \beta)) \\ F(\alpha_1, \beta.B) = H_2(\alpha_1, \beta, F(\alpha_1, \beta)) \\ F(\alpha_1, \beta.C) = H_3(\alpha_1, \beta, F(\alpha_1, \beta)) \\ F(\alpha_1, \beta.D) = H_4(\alpha_1, \beta, F(\alpha_1, \beta)) \end{cases}$$ Нека освен това G(α)=αβ и $$\begin{cases} H_1(\alpha, \beta, \chi) = \alpha\beta\chi \\ H_2(\alpha, \beta, \chi) = \alpha\alpha\beta\chi \\ H_3(\alpha, \beta, \chi) = \alpha\beta\beta\chi \\ H_4(\alpha, \beta, \chi) = \alpha\beta\chi\chi \end{cases}$$

Тогава $$\begin{cases} F(\alpha_1.\wedge) = \alpha_1 B \\ F(\alpha_1, \beta.A) = \alpha_1, \beta\ F(\alpha_1, \beta) \\ F(\alpha_1, \beta.B) = \alpha_1\alpha_1, \beta\ F(\alpha_1, \beta) \\ F(\alpha_1, \beta.C) = \alpha_1, \beta\beta, F(\alpha_1, \beta) \\ F(\alpha_1, \beta.D) = \alpha_1, \beta\ F(\alpha_1, \beta)F(\alpha_1, \beta) \end{cases}$$

Ще определим функцията F при β=$A_i.A_j$. за всички думи с произволна дължина.

Нека α_1=DAC, β=BC. Ще изчислим само F(α_1, β,D)=F(DAC,BCD). За целта е необходимо да се определят няколко междинни значения на тази функция

F(α_1, $\wedge$) =DACB

F(α_1, β) = F(α_1, $\wedge$ β)=H_2(α_1, $\wedge$, F(α_1, $\wedge$))=DACDACDACB

F(α_1,BC)= H_3(α_1, B, F(α_1, B))=DACBBDACDACDACB

F(α_1,BCD)= H_4(α_1, BC, F(α_1,BC))=DACBCDACBBDACDACDACBDACBBDACDACDACB

……………………..

Да намерим всички представящи функции G(α)=αB, g(x)=c(G(Kx)), където К е първоначалната номерация на символите от азбуката A={A,B.C.D}. p=4

g(x)=c(αB)=$2p^0$+c(α)p^1=2+c(α)p=2+4x следователно g(x)=2+4x е търсената функция, представляваща G(α).

H_1(α, β, χ)=**α**β χ,

h_1(x,y,z)=c(H_1(Kx,Ky,Kz))=c(**α**β χ**)=c(**χ**)+pc(**β)+p^2c(α)=p^2x+py+z=16x+4y+z

H_2(α, β, χ)=**αα**β χ,

h_2(x,y,z)=c(H_2(Kx,Ky,Kz))=c(**αα**β χ**)=c(**χ**)+pc(**β)+p^2c(α)+p^3c(a)=(p^2+p^3)x+py+z= 80x+4y+z

H_3(α, β, χ)= **α**β β χ,

h_3(x,y,z)=c(**α**β β χ**)=c(**χ**)+pc(**β)+p^2c(β)+p^3c(a)=p^3x+(p+p^2)y+z= 64x+20y+z

H_4(α, β, χ)= **α**β χ χ,

H_4(x,y,z)=c(**α**β χ χ**)=c(**χ**)+pc(**χ)+p^2c(β)+p^3c(a)=p^3x+p^2y+(1+p)z= 64x+16y+5z

Изчисляването на представляващата функция ще направим, като използваме схемата за примитивна рекурсия:

$$\begin{cases} f(x,0) = g(x) \\ f(x,4y+i) = h_i(x, y, f(x, y)), i = 1,2,3,4 \end{cases} \tag{4}$$

Получават се следните значения на представляващата функция:

f(0,0)=g(0)=2+4.0=2, f(1.0)=6, f(2,0)=10

y=0, i=1

f(1,4.0+1)=f(1,1)=h_1(1.0.f(1,0))=h_1(1,0,6)=22

y=0, i=2

f(1,4.0+2)=f(1,2)=h_2(1.0.f(1,0))=h_2(1,0,6)=86

y=0, i=3

f(1,4.0+3)=f(1,3)=h_3(1.0.f(1,0))=h_3(1,0,6)=70

y=0, i=4

f(1,4.0+4)=f(1,4)=h_4(1.0.f(1,0))=h_4(1,0,6)=94

y=1, i=1

$f(1,4.1+1)=f(1,5)=h_1(1.1.f(1,1))=h_1(1,1,22)=40$
$y=1,\ i=2$
$f(1,4.1+2)=f(1,6)=h_1(1.1.f(1,1))=h_1(1,1,22)=106$
$y=1,\ i=2$
$f(1,4.1+3)=f(1,7)=h_1(1.1.f(1,1))=h_1(1,1,22)=106$
$y=1,\ i=2$
$f(1,4.1+4)=f(1,8)=h_1(1.1.f(1,1))=h_1(1,1,22)=190$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По аналогия на основните изчислителни операции над числови функции могат да се определят и операциите суперпозиция и минимизация на функциите над азбуки. С помощта на тези функции лесно и без значителни изчисления се получава примитивната рекурсия на всички най-често използвани функции над азбуки. Методът е прилаган при построяване на машини на Тюринг за изчисляване на функции над азбуки.

Предложеният метод може да бъде използван за разработване на ефективни алгоритми за обработка на множества от думи и работа с формални езици.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Акимов О. Е. Дискретная математика. Логика, групь, граф.-М. Лаборатория базов х знаний БХВ Петербург 2003.
[2] Шапорев С. Д. Математическая логика ГУП Типография Наука, Санк Петербург, 2005.

За контакти:

Гл. ас. д-р Илияна Раева, Катедра *Математика*, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 453, e-mail: iraeva@uni-ruse.bg