Дидактически възможности за пропедевтика на елементарни алгебрични знания в обучението по математика в началните класове

Маргарита Върбанова, Катина Тончева

Abstract: Didactic possibilities for propedeutics of elementary algebraic knowledge in mathematics education in primary school: *An important task of the classes in Mathematics at school is to reveal and implement intersubject connections between the different areas of mathematics. This paper offers models of solutions to groups of problems from primary school mathematics, which provide opportunities for propedeutics of key concepts from elementary algebra (denoting a number with a letter, ordered pair, equation, etc.) and create preconditions for understanding and realization of the logical connection between the two main branches of mathematics – arithmetic and algebra. The problems are in order of difficulty of the solution and are designed with appropriate didactic and mathematical tools.*

Key words: *elementary algebra, primary school mathematics, denoting a number with a letter*

ВЪВЕДЕНИЕ

Съвременната математика изисква както модернизиране на съдържанието на училищния курс по математика, така и повишаване на теоретичното равнище на преподаване на това съдържание. С цел създаване на предпоставки за разбиране и осъзнаване на логическата връзка между двата основни дяла на математиката (аритметика и алгебра) и възможности за „плавен преход” от аритметиката към алгебрата, е целесъобразно подготовката на учениците за изучаване на знания от алгебрата да започне с означаването на число с буква (буквена символика). Така чрез буквените означения се правят първите стъпки в усвояването на езика на математическата символика и се разкриват възможности за по-кратко и обобщено записване на твърдения, установени индуктивно или обосновани с помощта на множества.

ИЗЛОЖЕНИЕ

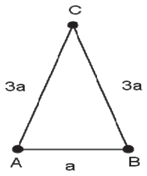
Въвеждането на буквената символика в обучението по математика е доста труден и продължителен процес, при който знанията на учениците придобиват по-висока степен на абстрактност и обобщеност. За постигане целите на обучението по математика и преодоляване на трудностите при овладяване на елементарните алгебрични знания, считаме че е добре въвеждането на буквените означения да започне още от първи клас и постепенно този процес да се разширява и задълбочава. Полезно е в учебната практика да се използват задачи, които могат да се моделират с помощта на буквената символика, а моделите им са аритметични или алгебрични уравнения (неравенства), решаването на които е възможно с помощта на елементарни средства. Такива задачи могат да се посочат, както в учебниците по математика, така и в почти всички математически състезания, турнири, олимпиади. В някои случаи (ако задачата позволява) е уместно да се предложат два начина на решение - с помощта на букви (чрез уравнение) и без участието на букви (с числени изрази). Тогава е полезно да се анализират предложените начини на решение и да се покаже, че решението с буквените означения е по-естествено, по-ясно и последователно са моделирани дейностите, описани в дадачата, и в известен смисъл това решение е по-леко.

Дидактически възможности за алгебрична пропедевтика в обучението по математика ще представим с решенията на пет задачи, предназначени за ученици от началните класове и предлагани на състезания и олимпиади. При конструирането на моделите на задачите е използвана буквена символика, а математическите дейности с моделите (тъждествените преобразувания) се основават на зависимостите между компонентите на аритметичните операции събиране, изваждане, умножение и деление, и на свойствата на тези четири операции. (*Отбелязваме факта, че в програмите по математика за началните класове от 2001 г. не се планира изучаването на буквената символика).*

Задача 1. *Намерете дължината на бедрото на рабнобедрен триъгълник с обиколка 42, ако то е 3 пъти по-голямо от основата му.* (Великденско математическо състезание, 4 клас, 2014)

Решение: Ако учениците не са обучавани в използването на букви за означаване на числа, създават се известни трудности в представянето на начини на решение. Дори има случаи в практиката, когато деца, успешно решили задачата, не могат да обеснят пътя, по който те са разсъждавали. Нашето мнение е, че много по-лесно и по-естествено може да се представи решението, ако се използва буквената символика. Математическите дейности, свързани с решаването на задачата, могат да протекат в следната последователност.

1) Означава се дължината на основата на дадения триъгълник с буква *a* и от условието на задачата следва, че бедрата на триъгълника имат дължина 3.*a*.(фиг. 1)



Фигура 1

2) Използва се определението за обиколка на триъгълник и обиколката на този триъгълник се означава с P. Записва се P = 3.*a*+3.*a*+*a*.

3) Но от условието на задачата обиколката е 42. Тогава може да се обобщи, че 3.*a*+3.*a*+*a* е толкова, колкото 42 и да се запише равенството 3.*a*+3.*a*+*a* = 42, т.е. да се „уравнят" двете стойности на обиколката на дадения триъгълник.

4) В началните класове обикновено уравненията от този вид се решават, като най-напред се прилага дистрибутивното свойство на операцията умножение по отношение на събирането, т.е. разпределителното свойство с участието на буква, и така се получава аритметичното уравнение 7.*a* = 42.

5) Последното уравнение се решава с приложение правилото за намиране на неизвестен множител (*Неизвестен множител се намира като се раздели произведението на известния множител)*. Така се определя стойността на *a* (*a* = 6) и съответно на 3.*a* = 3.6 = 18

Отговор. Дължината на основата е 6, а на бедрото е 18.

Задача 2. *Попитали Петьо на колко години е, а той отговорил: „Татко е на 42 години. Той е с две години по-голям от мама. Мама пък има два пъти повече години от мен и брат ми заедно. Но все пак аз съм с цели 2 години по-голям от брат ми". На колко години са Петьо, брат му и майка му?* (Общински кръг на олимпиада по математика, Плевен, 4 клас, 2012)

Решение. Нека с *x* се означи броя на годините на брата на Петьо. Тъй като Петьо е с 2 години по-голям от брат си, то неговите години се представят с израза *x*+2. Майката е два пъти по-голяма от годините на Петьо и брат му – тази зависимост се моделира с израза 2.(*x*+(*x*+2)). Но бащата е с 2 години по-голям от майката и неговата възраст се представя с израза 2.(*x*+(*x*+2))+2. От условието на задачата годините на бащата са 42. Тогава може да се каже, че стойността на записания израз с буква е 42. Така с числовото равенство 2.(x+(x+2))+2 = 42, в което участва буква, се „уравняват” годините на бащата.

Полученото уравнение е алгебрично уравнение, защото неизвестното, означено с буква, участва два пъти. Удачно е в началните класове решаването на алгебрични уравнения да се извършва с помощта на правилата за намиране на неизвестни компоненти на четирите аритметични операции. В конкретния случай последователността от примерните математически дейности е следната:

1. В равенството 2.(x+(x+2))+2 = 42 изразът 2.(x+(x+2)) е събираемо и неизвестното събираемо са намира с разликата от сбора и известното събираемо, т.е. 2.(x+(x+2)) = 42 – 2 $\Leftrightarrow$ 2.(x+(x+2)) = 40.
2. В полученото равенство изразът x+(x+2) е множител. Прилага се правилото за намиране на неизвестен множител и се получава равенството x+(x+2) = 20.
3. В израза x+(x+2) се извършат тъждествени преобразувания на базата на знанията за съдружителното свойство на действие събиране и разпределителното свойство на действие умножение по отношение на събирането с участието на буква, и се получава x+(x+2) = 20 $\Leftrightarrow$ x+x+2 = 20 $\Leftrightarrow$ 2.x+2 = 20.
4. В равенството 2x+2 = 20 събираемото 2.x се намира с разликата 20–2. Тогава 2.x = 18.
5. В уравнението 2.x = 18 неизвестното x се намира с правилото за намиране на неизвестен множител. Получава се x = 18 : 2 $\Leftrightarrow$ x = 9.

За да се отговори на въпроса на задачата и се направи „преход” от алгебрата към аритметиката, и от там към практиката, е необходимо да се замести стойността на x в преди това конструираните изрази, моделиращи годините на Петьо и неговата майка.

Отговор. Петьо е на 11 години, брат му е на 9 години, майката е на 40 години.

Задача 3*. Катеричките Рунтавелка и Къдравелка събраха заедно 60 лешника. На всеки 3 донесени от Рунтавелка, Къдравелка добавяше по 2. Колко лешника е събрала Къдравелка?* (Великденско математическо състезание, 4 клас, 2011)

Решение. С x се означава броя на всички идвания, в които катеричките са носили лешници. Тогава моделът на задачата се конструира, като се има предвид това, че Рунтавелка е носела по 3 лешника - тогава тя е донесла общо 3.x лешници. Къдравелка е носела по 2 лешника и нейният общ брой лешници е 2.x. Общият брой лешници на двете катерички се моделира с израза 3.x+2.x. Но от условието е известно, че той е 60. Тогава може да се запише числовото равенство с буква 3.x+2.x = 60. По своята същност то е алгебрично уравнение и както се посочи в решението на предходната задача, същото се решава, като най-напред се прилага разпределителното свойство на действие умножение по отношение на събирането и след това правилото за намиране на незвестен множител. В резултат на това се получава 3.x+2.x = 60 $\Leftrightarrow$ 5.x = 60 $\Leftrightarrow$ x = 12. Така всяка катеричка е носила 12 пъти лешници.

Отговор. Къдравелка е събрала общо 2.12 = 24 (лешника).

Задача 4*. Ася чете книга, като всеки ден прочита по една страница повече от предишния. Ако за 9 дни е прочела 72 страници, колко страници е прочела на седмия ден? ?* (Коледно математическо състезание, 3 клас, 2013)

Решение. Означава се с x броя на страниците, които е прочела Ася през първия ден. Тогава през следващите дни тя е прочела следния брой страници:II ден – (x+1); III ден – (x+2); IV ден – (x+3); V ден – (x+4); VI ден – (x+5); VII ден – (x+6); VIII ден – (x+7); IX ден – (x+8). Броят на всички страници, прочетени за 9 дни, може да се представи с равенството x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)+(x+8). Но в условието на задачата е отбелязано, че прочетените страници за 9 дни са 72. Като се извършат съответните преобразувания (на основата на свойствата на аритметичните операции), се получава аритметичното уравнение 9.x+36 = 72. Прилагат се правилата за намиране на незвестно събираемо и на неизвестен множител, и се получават последователно равенствата 9.x+ 36 = 72 ⇔ 9.x = 72 - 36 ⇔ 9.x = 36 ⇔ x = 36:9 ⇔ x = 4. Прави се „преход" от алгебрата към аритметиката (4+6 = 10), след това към практиката и се оформя отговора на задачата.

Отоговор. Първият ден Ася е прочела 4 страници, а на седмия тя е прочела 10 страници.

Задача 5. *Иво намислил едно число. Увеличил го с 3, полученото число намалил 3 пъти, после прибавил 7 и полученият сбор умножил по 5. Накрая прибавил най-малкото четно число и получил числото 67. Кое число е намислил Иво?* (Великденско математическо състезание, 4 клас, 2012)

Решение. Задачата може да се реши с помощта на означения с букви и тогава ще се получи едно доста сложно за учениците от началните класове уравнение. Например да означим намисленото число от Иво с x. Извършените последователно от него пресмятания са съответно: x+3; (x+3):3; (x+3):3+7; ((x+3):3+7).5; ((x+3):3+7).5+2. След като накрая Иво получил числото 67, то може да се запише следното числово равенство: ((x+3):3+7).5+2 = 67. (1)

От математико-дидактична гледна точка, полученото уравнение е аритметично и неговото решение изисква приложение на зависимостите между компонентите при операциите събиране, умножение и деление. Процесът на решаване се състои главно от следните „стъпки":

1. В (1) изразът ((x+3):3+7).5 се разглежда като неизвестно *събираемо*. Съгласно правилото за намиране на събираемо, той е равен на разликата от сбора (67) и известното събираемо (2), т.е. ((x+3):3+7).5 = 67-2 ⇔ ((x+3):3+7).5 = 65. (2)
2. В уравнение (2) изразът ((x+3):3+7) е неизвестен *множител* и същият се открива, като се раздели произведението (65) на известния множител (5), т.е. (x+3):3+7 = 65:5 ⇔ (x+3):3+7 = 13. (3)
3. В уравнение (3) изразът (x+3):3 е неизвестно *събираемо* и отново се прилага зависимостта между компонентите при събирането и се получава (x+3):3 = 13-7 ⇔ (x+3):3 = 6. (4)
4. Изразът (x+3) е неизвестно *делимо* в уравнение (4) и неговата стойност е равна на произведението на числата 6 и 3. Така се достига до уравнението x+3 = 18. (5)
5. В уравнение (5) неизвестното отново е *събираемо* и неговата стойност е разликата на числата 18 и 3. Така се получава, че *x* = 15.

Отговор. Иво е намислил числото 15.

Вижда се, че решаването на предложената задача с помощта на букви, води до съставяне и решаване на уравнение, което е тип „матрьошка", т.е. уравненията (1), (2), (3), (4) и (5) се включват едно в друго и тяхното решаване изисква приложение на зависимостите между компонените на аритметичните операции.

Възможно е същата задача да се реши с учениците от началните класове, но с много по-елементарни средства. За целта е подходящо конструирането на модел на задачата от вида „*верижна" диаграма* (диаграма редица от „квадратчета и стрелки" и след това приложение на метода „*инверсия*" (чрез „обръщане" на аритметичните операции) за решаване на задачи.

В този случай текстът на задачата се моделира със следната верижка от „квадратчета и стрелки":

$$\boxed{} \xrightarrow{+3} \boxed{} \xrightarrow{:3} \boxed{} \xrightarrow{+7} \boxed{} \xrightarrow{.5} \boxed{67} \xrightarrow{+2} \boxed{67}$$

Използва се методът „инверсия”, като се заменя изваждането със събиране, събирането с изваждане, делението с умножение, умножението с деление. Получава се още една верижка, но с обратната посока. Извършват се съответните пресмятания и се получава съответно 15.

$$\boxed{\mathbf{15}} \underset{-3}{\overset{+3}{\rightleftarrows}} \boxed{18} \underset{.3}{\overset{:3}{\rightleftarrows}} \boxed{6} \underset{-7}{\overset{+7}{\rightleftarrows}} \boxed{13} \underset{:5}{\rightleftarrows} \boxed{65} \underset{-2}{\rightleftarrows} \boxed{67}$$

Ако обаче в първото квадратче на модела се запише буквата *x* и последователно се приложат съответните аритметични преобразувания (действия), то се получава уравнението ((x+3):3+7).5+2 = 67. Тогава може да се каже, че моделът с „квадратчета и стрелки” не само представя логическата структура на задачата и разкрива метод за нейното решаване, но е и първооснова за конструиране на алгебричен модел на задачата. Двата начина на решение на задачата много ясно и достъпно илюстрират възможностите за интегриране на моделирането с *„верижна” диаграма* и пропедевтиката на знания от елементарната алгебра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Използването на буквена символика за означаване на неизвестни обекти предоставя възможности за синтезирано и по-ясно логическо и дидактическо моделиране на текста на задачата. Отделянето на неизвестните и известните компоненти в задачата и изрязяването на отношенията между тях, се моделират много по-естествено и то предимно в последователност, съответстваща на описанията им в задачата.

Въвеждането на буквената символика в учебното съдържание по математика в началните класове е предпоставка не само за осъществяване на ефективна пропедевтика на елементарни знания от алгебрата, но е и едно удобно и „разбираемо” средство за обучение на учениците в логико-математически анализ на текстовите задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Върбанова, М. Методика на обучението по математика в началните класове. Пловдив: Астарта, 2013.

[2] Върбанова, М. Структурно-функционално моделиране в началната училищна математика. Пловдив: Астарта, 2013.

За контакти:

Проф. д-р Маргарита Върбанова, Катедра “Алгебра и геометрия”, ВТУ “Св. св. Кирил и Методий”, тел.: 062 64-59-43, e-mail: mvarbanova11@abv.bg

Катина Тончева, докторант към Катедра “Алгебра и геометрия”, ВТУ “Св. св. Кирил и Методий”, тел.: 0887 272 994 e-mail: katina_t@abv.bg