Дидактически идеи за решаване на линейни модулни уравнения от вида $|ax+b|=c$ в обучението по математика

Иванка Минчева

Abstract: Didactic ideas on solving linear modular equations of a type $|ax+b|=c$ in teaching mathematics: *The paper discusses the process of solving linear equations containing at least one module. Some didactic ideas like stages of solving, problems-components of any given problem, strategies for solving a problem, difficulties and mistakes that are expected to be made by pupils are analyzed. As a way of overcoming these issues and achieving understanding as well as efficient learning, teaching and mastering the linear equations solving skills, systems of problems are proposed.*

Key words: *Linear Equation, Equation of a Type $|ax+b|=c$, Module, Problem Solving, System of Problems.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Решаването на задачи е основна дейност в обучението по математика, чрез която се въвеждат, усвояват и проверяват и оценяват знанията на обучаемите по математика. В частност темата „Уравнения" е централна тема от училищния курс по математика, която започва да се изучава в началните класове и заема важно място в следващите етапи на обучение. Разбирането и изграждане на умения за решаване на линейни уравнения е цел на обучението по математика тъй като те се използват за решаване на други групи задачи, прилагат се в други науки и в практиката. Тези уравнения са и част от темите, включени в учебното съдържание за външно оценяване знанията и уменията на учениците в седми клас. Поради тези факти, както и поради често срещаните трудности при решаване на линейни уравнения е необходимо по-детайлно и задълбочено изследване и анализиране на проблемите в това отношение.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Идеите на разглеждане на избраната тема се систематизират в следните направления:

- Етапи на решаване на задачи
- Понятия – компоненти и задачи – компоненти на дадена задача
- Трудности и грешки при решаване на дадена група задачи
- Системи задачи за усвояване решаването на уравнения от вида $|ax+b|=c$

1. Етапи на решаване на задачи – дидактически и математически аспекти. Етапи на решаване на уравнение от вида $|ax+b|=c$.

Класическият модел на етапите на решаване на задачи, предложен от Дйорд Пойа е следният:

- Разбиране (на задачата)
- Избор на стратегия (за решаване на задачата)
- Решаване (на задачата)
- Поглед назад.

Разбирането на уравнение от вида $|ax+b|=c$ е свързано основно с познаването, разпознаването на вида на задачата, откриване на елементите ѝ – лява, дясна страна на уравнението, коефициент/и, неизвестно, сравняване на даденото уравнение с общия вид на уравнението $|ax+b|=c$ и присъединяване или неприсъединяване на даденото уравнение към уравнение в общ вид.

Изборът на стратегия за решаване на даденото уравнение включва откриване на тъждествените преобразования над изразите в уравнението и на съответните теореми за еквивалентни уравнения. Тук от особена важност е познаване на етапите на решаване на модулно уравнение от вида $|ax+b|=c$, $a \neq 0$.

Решаването е последователно следване стъпките от предходния етап като се внимава за пропуски и грешки при преобразованията и записване на отговора.

Погледът назад традиционно включва проверка за грешки, насочване на вниманието към основните етапи на решението, отнасянето на конкретното уравнение към други задачи от този вид и формулиране на изводи, извеждане на ключови знания и умения, необходими за решаване на дадения вид задачи.

2. Понятия – компоненти и задачи – компоненти на уравнението $|ax+b|=c$

Основните понятия и задачи компоненти, необходими за решаване на уравнение от вида $|ax+b|=c$, са систематизирани в таблицата по-долу.

понятия-компоненти	задачи-компоненти
модул на реално число модул на линеен алгебричен израз линейно уравнение с едно неизвестно неизвестно, решение/корен на уравнение тъждествени преобразования на изрази еквивалентни преобразования на уравнения	намиране модул на число прилагане свойствата на модула решаване на линейни уравнения с едно неизвестно прилагане на тъждествени преобразования на изрази прилагане на еквивалентни преобразования на уравнения

3. Трудности и грешки при решаване на уравнение от вида $|ax+b|=c$

Най-често срещаните трудности и грешки при решаване на разглежданото уравнение са свързани с дейностите:

- Разпознаване на задачата като уравнение от вида $|ax+b|=c$.
- Извършване на тъждествени преобразования, включващи действия с числа и изрази и прилагане на методите за разлагане на множители
- Прилагане на теоремите за еквивалентни уравнения.
- Несъобразяване на условията за дясната страна на уравнението (числото c), свързано с неразбиране на понятието модул.
- Решаване на линейно уравнение в общ вид и най-често на частните случаи на линейно уравнение $ax+b=c$ $(0x=0;\, 0x=m, m\neq 0)$.
- Разбиране на логическата операция дизюнкция при определяне и записване корените на уравнението.

4. Системи задачи за усвояване решаването на уравнения от вида $|ax+b|=c$

С цел съобразяване с гореизложените идеи и постигане на ефективно обучение в решаване на уравнения от вида $|ax+b|=c$, предлагаме последователност от системи задачи, групирани според вариране/промяна на някое несъществено свойство на уравнението.

Система 1. Уравнения от вида $k.|x|=c$ $(a=1,\, b=0)$. Подсистеми на Система 1. могат да се получат, ако:

- k заема различни стойности.
- c заема различни стойности: $(c=\pm 1; c=0,\, c>0,\, c<0,\, c\in Z,\, c\in Q)$.

Една примерна последователност от подсистеми на Система 1. може да бъде следната:

Система 1.1	**Система 1.2**	**Система 1.3**	**Система 1.4**	**Система 1.5**
$k=1$	$k>0, k\in Z$	$k<0, k\in Z$	$k>0, k\in Q$	$k<0, k\in Q$
$\|x\|=1$	$3.\|x\|=1$	$-\|x\|=1$	$\frac{1}{3}.\|x\|=1$	$-\frac{2}{3}.\|x\|=1$
$\|x\|=-1$	$2.\|x\|=-1$	$-2.\|x\|=-1$	$\frac{1}{2}.\|x\|=-1$	$-\frac{2}{7}.\|x\|=-1$
$\|x\|=0$	$8.\|x\|=0$	$-8.\|x\|=0$	$\frac{5}{8}.\|x\|=0$	$-\frac{3}{5}.\|x\|=0$
$\|x\|=3$	$7.\|x\|=3$	$-7.\|x\|=3$	$\frac{7}{2}.\|x\|=3$	$-\frac{4}{3}.\|x\|=3$
$\|x\|=-2$	$6.\|x\|=-2$	$-6.\|x\|=-2$	$\frac{3}{4}.\|x\|=-2$	$-\frac{5}{16}.\|x\|=-2$
$\|x\|=\frac{1}{3}$	$12.\|x\|=\frac{3}{20}$	$-15.\|x\|=\frac{20}{3}$	$\frac{1}{5}.\|x\|=\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{8}.\|x\|=\frac{4}{17}$
$\|x\|=-\frac{2}{5}$	$9.\|x\|=-\frac{2}{3}$	$-11.\|x\|=-\frac{22}{7}$	$\frac{2}{13}.\|x\|=-\frac{11}{2}$	$-\frac{12}{5}.\|x\|=-\frac{7}{24}$

Уравнения от вида $|k.x|=c, k\neq 1$ или $m.|k.x|=c, m\neq 1, k\neq 1$ могат да се разглеждат като част от Система 1. като се решават по един от следните два начина:

- Чрез използване свойството на модула $|k.x|=|k|.|x|$ и след съответните тъждествени преобразования да се сведат до някое уравнение от Система 1. $\left(|7.x|=3 \Leftrightarrow |7|.|x|=3 \Leftrightarrow 7.|x|=3\right)$. Този вид уравнения могат да се получат от тези от Система 1. чрез внасяне на съответния коефициент или на модула му под знака на модула на неизвестното.
- Чрез използване определението за модул и свеждане решаването на уравнението до решаване на някое от основните уравнения от вида $k.x=c, k.x=-c, k.x=0$. $\left(|7.x|=3 \Leftrightarrow 7.x=3 \cup 7.x=-3\right)$

Система 2. Уравнения от вида $k.|ax+b|=c, b\neq 0$. Подсистемите на Система 2. могат да се получат чрез същите систематизиращи фактори (промяна стойностите на коефициентите k и c) както при Система 1. Тук е добре да се променят и стойностите на коефициентите a и b. Някои подсистеми на Система 2. могат да бъдат следните:

Система 2.1 $k=1, a=\pm 1, b\in Z\ (b\neq 0), c\in Z \cup c\in Q$

$|x+1|=1$ $|x+1|=-1$ $|x+1|=41$ $|x+1|=-41$ $|x+1|=0$ $|x+1|=\frac{7}{3}$ $|x+1|=-\frac{7}{3}$

$|x-1|=1$ $|x-1|=-1$ $|x-1|=13$ $|x-1|=-13$ $|x-1|=0$ $|x-1|=\frac{4}{9}$ $|x-1|=-\frac{4}{9}$

$|x+6|=1$ $|x+6|=-1$ $|x+6|=25$ $|x+6|=-25$ $|x+6|=0$ $|x+6|=\frac{3}{14}$ $|x+6|=-\frac{3}{14}$

$|x-7|=1$ $|x-7|=-1$ $|x-7|=11$ $|x-7|=-11$ $|x-7|=0$ $|x-7|=\frac{1}{4}$ $|x-7|=-\frac{1}{4}$

$|-x+1|=1$ $|-x+1|=-1$ $|-x+1|=17$ $|-x+1|=-17$ $|-x+1|=0$ $|-x+1|=\frac{3}{5}$ $|-x+1|=-\frac{3}{5}$

$|-x-1|=1$ $|-x-1|=-1$ $|-x-1|=8$ $|-x-1|=-8$ $|-x-1|=0$ $|-x-1|=\frac{5}{2}$ $|-x-1|=-\frac{5}{2}$

$|-x+5|=1$ $|-x+5|=-1$ $|-x+5|=4$ $|-x+5|=-4$ $|-x+5|=0$ $|-x+5|=\frac{3}{10}$ $|-x+5|=-\frac{3}{10}$

$|-x-2|=1$ $|-x-2|=-1$ $|-x-2|=9$ $|-x-2|=-9$ $|-x-2|=0$ $|-x-2|=\frac{1}{4}$ $|-x-2|=-\frac{1}{4}$

Система 2.2 $k=1, a\in Z, (a\neq\pm1), b\in Z\ (b\neq 0), c\in Z\cup c\in Q$

$|3x+5|=1$ $|3x+5|=-1$ $|3x+5|=6$ $|3x+5|=-6$ $|3x+5|=0$ $|3x+5|=\frac{1}{3}$ $|3x+5|=-\frac{1}{3}$

$|2x-1|=1$ $|2x-1|=-1$ $|2x-1|=5$ $|2x-1|=-5$ $|2x-1|=0$ $|2x-1|=\frac{4}{3}$ $|2x-1|=-\frac{4}{3}$

$|-5x+1|=1$ $|-5x+1|=-1$ $|-5x+1|=7$ $|-5x+1|=-7$ $|-5x+1|=0$ $|-5x+1|=\frac{5}{2}$ $|-5x+1|=-\frac{5}{2}$

$|-4x-5|=1$ $|-4x-5|=-1$ $|-4x-5|=3$ $|-4x-5|=-3$ $|-4x-5|=0$ $|-4x-5|=\frac{6}{5}$ $|-4x-5|=-\frac{6}{5}$

Система 2.3 $k=1, a=\pm1, b\in Q\ (b\neq 0), c\in Z\cup c\in Q$

$\left|x+\frac{1}{9}\right|=1$ $\left|x+\frac{1}{9}\right|=-1$ $\left|x+\frac{1}{9}\right|=2$ $\left|x+\frac{1}{9}\right|=-2$ $\left|x+\frac{1}{9}\right|=0$ $\left|x+\frac{1}{9}\right|=\frac{3}{4}$ $\left|x+\frac{1}{9}\right|=-\frac{3}{4}$

$\left|x-\frac{7}{2}\right|=1$ $\left|x-\frac{7}{2}\right|=-1$ $\left|x-\frac{7}{2}\right|=7$ $\left|x-\frac{7}{2}\right|=-7$ $\left|x-\frac{7}{2}\right|=0$ $\left|x-\frac{7}{2}\right|=\frac{1}{4}$ $\left|x-\frac{7}{2}\right|=-\frac{1}{4}$

$\left|-x+\frac{4}{15}\right|=1$ $\left|-x+\frac{4}{15}\right|=-1$ $\left|-x+\frac{4}{15}\right|=3$ $\left|-x+\frac{4}{15}\right|=-3$ $\left|-x+\frac{4}{15}\right|=0$ $\left|-x+\frac{4}{15}\right|=\frac{1}{10}$ $\left|-x+\frac{4}{15}\right|=-\frac{1}{10}$

$\left|-x-\frac{6}{7}\right|=1$ $\left|-x-\frac{6}{7}\right|=-1$ $\left|-x-\frac{6}{7}\right|=12$ $\left|-x-\frac{6}{7}\right|=-12$ $\left|-x-\frac{6}{7}\right|=0$ $\left|-x-\frac{6}{7}\right|=\frac{3}{14}$ $\left|-x-\frac{6}{7}\right|=-\frac{3}{14}$

Система 2.4 $k=1, a\in Z, (a\neq\pm1), b\in Q\ (b\neq 0), c\in Z\cup c\in Q$

$\left|2x+\frac{1}{5}\right|=1$ $\left|2x+\frac{1}{5}\right|=-1$ $\left|2x+\frac{1}{5}\right|=5$ $\left|2x+\frac{1}{5}\right|=-5$ $\left|2x+\frac{1}{5}\right|=0$ $\left|2x+\frac{1}{5}\right|=\frac{3}{20}$ $\left|2x+\frac{1}{5}\right|=-\frac{3}{20}$

$\left|7x-\frac{4}{3}\right|=1$ $\left|7x-\frac{4}{3}\right|=-1$ $\left|7x-\frac{4}{3}\right|=12$ $\left|7x-\frac{4}{3}\right|=-12$ $\left|7x-\frac{4}{3}\right|=0$ $\left|7x-\frac{4}{3}\right|=\frac{3}{2}$ $\left|7x-\frac{4}{3}\right|=-\frac{3}{2}$

$\left|-5x+\frac{6}{5}\right|=1$ $\left|-5x+\frac{6}{5}\right|=-1$ $\left|-5x+\frac{6}{5}\right|=3$ $\left|-5x+\frac{6}{5}\right|=-3$ $\left|-5x+\frac{6}{5}\right|=0$ $\left|-5x+\frac{6}{5}\right|=\frac{1}{6}$ $\left|-5x+\frac{6}{5}\right|=-\frac{1}{6}$

$\left|-3x-\frac{1}{3}\right|=1$ $\left|-3x-\frac{1}{3}\right|=-1$ $\left|-3x-\frac{1}{3}\right|=9$ $\left|-3x-\frac{1}{3}\right|=-9$ $\left|-3x-\frac{1}{3}\right|=0$ $\left|-3x-\frac{1}{3}\right|=\frac{3}{5}$ $\left|-3x-\frac{1}{3}\right|=-\frac{3}{5}$

Система 2.5 $k=1, a\in Q, (a\neq\pm1), b\in Z\ (b\neq 0), c\in Z\cup c\in Q$

$\left|\frac{1}{3}x+5\right|=1$ $\left|\frac{1}{3}x+5\right|=-1$ $\left|\frac{1}{3}x+5\right|=3$ $\left|\frac{1}{3}x+5\right|=-3$ $\left|\frac{1}{3}x+5\right|=0$ $\left|\frac{1}{3}x+5\right|=\frac{2}{3}$ $\left|\frac{1}{3}x+5\right|=-\frac{2}{3}$

$\left|\frac{2}{9}x-10\right|=1$ $\left|\frac{2}{9}x-10\right|=-1$ $\left|\frac{2}{9}x-10\right|=9$ $\left|\frac{2}{9}x-10\right|=-9$ $\left|\frac{2}{9}x-10\right|=0$ $\left|\frac{2}{9}x-10\right|=\frac{3}{10}$ $\left|\frac{2}{9}x-10\right|=-\frac{3}{10}$

$\left|-\frac{8}{3}x+16\right|=1$ $\left|-\frac{8}{3}x+16\right|=-1$ $\left|-\frac{8}{3}x+16\right|=4$ $\left|-\frac{8}{3}x+16\right|=-4$ $\left|-\frac{8}{3}x+16\right|=0$ $\left|-\frac{8}{3}x+16\right|=\frac{1}{4}$ $\left|-\frac{8}{3}x+16\right|=-\frac{1}{4}$

$\left|-\frac{1}{12}x-13\right|=1$ $\left|-\frac{1}{12}x-13\right|=-1$ $\left|-\frac{1}{12}x-13\right|=6$ $\left|-\frac{1}{12}x-13\right|=-6$ $\left|-\frac{1}{12}x-13\right|=0$ $\left|-\frac{1}{12}x-13\right|=\frac{5}{2}$ $\left|-\frac{1}{12}x-13\right|=-\frac{5}{2}$

Система 2.6 $k=1, a\in Q, (a\neq \pm 1), b\in Q\ (b\neq 0), c\in Z\cup c\in Q$

$\left\lvert\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right\rvert=1$	$\left\lvert\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right\rvert=-1$	$\left\lvert\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right\rvert=6$	$\left\lvert\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right\rvert=-6$	$\left\lvert\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right\rvert=0$	$\left\lvert\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right\rvert=\frac{1}{2}$	$\left\lvert\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right\rvert=-\frac{1}{2}$
$\left\lvert\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}\right\rvert=1$	$\left\lvert\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}\right\rvert=-1$	$\left\lvert\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}\right\rvert=4$	$\left\lvert\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}\right\rvert=-4$	$\left\lvert\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}\right\rvert=0$	$\left\lvert\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}\right\rvert=\frac{7}{10}$	$\left\lvert\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}\right\rvert=-\frac{7}{10}$
$\left\lvert-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right\rvert=1$	$\left\lvert-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right\rvert=-1$	$\left\lvert-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right\rvert=9$	$\left\lvert-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right\rvert=-9$	$\left\lvert-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right\rvert=0$	$\left\lvert-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right\rvert=\frac{7}{2}$	$\left\lvert-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right\rvert=-\frac{7}{2}$
$\left\lvert-\frac{11}{2}x-\frac{1}{2}\right\rvert=1$	$\left\lvert-\frac{11}{2}x-\frac{1}{2}\right\rvert=-1$	$\left\lvert-\frac{11}{2}x-\frac{1}{2}\right\rvert=4$	$\left\lvert-\frac{11}{2}x-\frac{1}{2}\right\rvert=-4$	$\left\lvert-\frac{11}{2}x-\frac{1}{2}\right\rvert=0$	$\left\lvert-\frac{11}{2}x-\frac{1}{2}\right\rvert=\frac{4}{9}$	$\left\lvert-\frac{11}{2}x-\frac{1}{2}\right\rvert=-\frac{4}{9}$

Следващите системи се получават по аналогичен начин като варират различни несъществени свойства на понятието модулно линейно уравнение. С цел краткост и компактност ще зададем системите само чрез представителните им задачи, записани в обобщен вид като $f(u)$ ще считаме за линейна функция на u. Всяка система ще илюстрираме с някои конкретни примери.

Система 3. $f(|ax+b|)=c$

Пример 1: $3.|x-14|-2=11$

Пример 2: $4.|15x-10|-|2-3x|=5|10-15x|+9$

Система 4. $|f(x)|=c$

Пример1: $|3x-14(2-x)|=4$

Пример 2: $\left|x^2-(1-x)^2\right|=1$

***Забележка*:** Тук е възможно функцията под знака за модул да е зададена като израз, който чрез изучените тъждествени преобразования (разлагане на множители, действия с едночлени и многочлени и др.) даденото уравнение да се приведе в уравнение в общ вид, т.е. в уравнение от вида $|ax+b|=c$.

Система 5. $|f(|ax+b|)|=c$

Пример1: $\big|\,|x-11|-2.|x-11|+4.|11-x|\,\big|=3$

Пример 2: $\big|\,|3-5x|-|48-80x|+|10x-6|\,\big|=6$

При съставяне на подсистемите на всяка главна система освен вариране на несъществените свойства на модулното линейно уравнение, които бяха показани в Система 1. и Система 2., се променят и свойства, свързани с:

- някои свойства на модула: $|k.u|=|k|.|u|$ и $|u-v|=|v-u|$;
- замяна на обикновените дроби с десетични.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Систематизирането на задачи е едно от основните дидактически средства за съзнателно и трайно усвояване на дадена група знания и за създаване на умения за решаване на разнообразни групи задачи. Така се постига и гъвкавост на мисленето, осигуряваща по-бързо и лесно решаване на задача от изучен вид, както и на задача, чието решение включва дадената задача. Считаме, че предложените идеи биха били полезни за теорията и практиката на обучението по математика и могат да се прилагат от всички, участващи в процеса на обучение или имащи отношение към него – ученици, учители, родители, студенти, подготвящи се за учители по математика, университетски преподаватели и автори на учебници по математика.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Петкова, С., Ю.Нинова, С.Матакиева. *Математика за седми клас*. София, Просвета, 2012.

[2] Лозанов, Ч., Т.Витанов, А.Калчева, Р.Караджова. *Математика за седми клас*. София, Анубис, 2010.

[3] Ганчев, И., В. Милушев и др. *Методи за решаване на задачи*. Пловдив, Макрос 2001, 2001.

За контакти:

Доц. д-р Иванка Минчева, Катедра "Алгебра и геометрия", Великотърновски университет "Св. св. Кирил и Методий", тел.: 062 600 461, 0884 67 94 96, e-mail: v.mincheva@yahoo.com

Забележка: Изследването е подкрепено от фонд Научни изследвания на ВТУ, проект „Изследователски подход в обучението по математика", № РД – 09-422-12/09.04.2014г.