

## Метод за синтез на сложни сигнали с малка стойност на отношението пикова – средна мощност

Михаил Илиев

**A Method for Synthesis of Complex Signals with a Small Value of the Peak-to-Average Power Ratio:** A method for OFDM signal synthesis with  $PAPR \leq 2$  is proposed in the present paper. The presented method provides good noise resistance of the OFDM system, high performance and low cost.

**Key words:** Signal synthesis, orthogonal frequency-division multiplexing - OFDM, peak-to-average power ratio – PAPR.

### ВЪВЕДЕНИЕ

Сигналите с ортогонално честотно делене и мултиплексиране (Orthogonal Frequency Division and Multiplexing - **OFDM**) са вид сложни дискретни честотно съставни фазово манипулирани сигнали **/ДЧС – ФМ/**, които намират много широко приложение във високоскоростните жични и безжичните комуникационни системи за пренос. Използването на този тип сигнали осигурява на комуникационните системи възможност за:

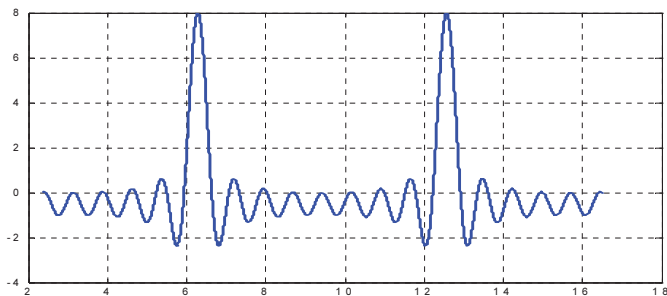
- Елиминиране на междусимволната интерференция;
- Оптимизиране на модулацията като скоростта на пренос в даден подканал зависи от интензивността на смущенията в него;
- Добро отношение цена-сложност поради реализиране процеса на модулация чрез дискретно преобразование на Фурие.

Класическата **OFDM** технология има два основни недостатъка:

- Чувствителност към неточностите на синхронизацията в резултат от компактното позициониране на подносещите честоти, при което малки неточности на синтезатора на честоти в приемника нарушава ортогоналността на подносещите и предизвиква така наречената интерференция между подносещите честоти (Inter Carrier Interference – **ICI**).
- Сравнително голяма стойност на отношението пикова-средна мощност на сигнала (Peak-to-Average Power Ratio – **PAPR**), произтичащ от факта, че при сумирането на **ФМ** сигнали от отделните подканалы е възможно синфазно наслагане на подносещите, при което моментната амплитуда на общия изходен **OFDM** сигнал, макар и за кратко, става много голяма. В резултат на това предавателната характеристика на крайния мощен усилвател (High Power Amplifier - **HPA**) трябва да бъде линейна в широк диапазон, което от своя страна е свързано с неефективно използване на предавателя по мощност.

Същността на проблема за голямата стойност на **PAPR** е илюстрирана на фиг. 1, където е показано синфазно наслагане на осем подносещи честоти, възникващо в ситуации, когато всички те са модулирани с един и същи символ. В резултат **PAPR** достига екстремално възможната стойност. Вероятността да се реализира ситуацията, показана на фиг. 1, е  $P_{PAPR=\max} = (1/2)^8 = 1/256$ .

Предложени и апробирани са в различна степен много методи за, намаляване **PAPR**. Най-общо те могат да се класифицират в две основни групи: методи с изкривяване формата на предавания сигнал (например чрез ограничаване на амплитудата му) и методи без изкривяване формата на предавания сигнал.



Фиг. 1. Синфазно наслагване на осем подносици честоти

Цел на представения доклад е да се предложи обобщен метод за синтез на сложни сигнали **IOFDM** с малка стойност на **PAPR**.

### ИЗЛОЖЕНИЕ

Предлаганият метод се базира на известните методи за обработка на сигнали осигуряващи малка стойност на **PAPR** чрез използване на комплементарните сигнали на Голай. Сигналите на Голай (Goley) са клас **ФМ** сигнали. Те не са най-добрите възможни сигнали по отношение стойностите на **PAPR**, но са универсални по отношение приложимост, както при цифрови така и при аналогови **OFDM** системи и притежават следните съществени предимства: абсолютна равномерност от гледна точка на сигналното съзвездие и простота на синтеза за безброй много стойности на елементарните импулси /чипове/ в сигнала /дължината **N**/.

На фиг. 2 а, б са показани автокорелационната функция **AKФ** на **ФМ** сигнали  $\{\mu(l)\}_{l=0}^{N-1}$  и  $\{\eta(l)\}_{l=0}^{N-1}$ , а на фиг. 2 в е представена сумарната им **AKФ**  $R_c(k)$ . Както се вижда, тя има идеална форма на делта импулс. Предвид на това, че **AKФ** на сигналите на Голай взаимно се допълват, те се наричат още комплементарни сигнали.

Развитието на технологиите за генериране на **ФМ** сигнали позволи да се разшири класа на комплементарните сигнали. По тази причина днес се използва следното определение за комплементарни сигнали:

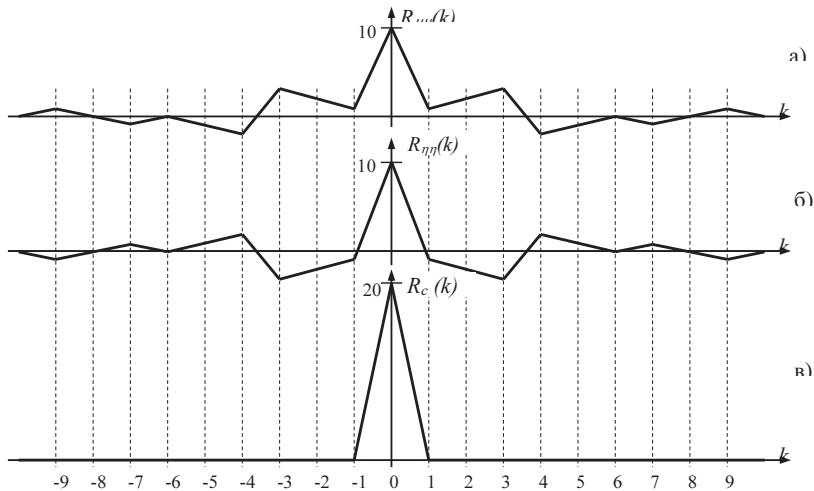
Множеството от **M** на брой равномерни **ФМ** сигнала:

$$\{A_1 = \{\xi_1(l)\}_{l=0}^{N_1-1}, A_2 = \{\xi_2(l)\}_{l=0}^{N_2-1}, \dots, A_M = \{\xi_M(l)\}_{l=0}^{N_M-1}\}; \quad (1)$$

$$\xi_m(i) \in \{e^{(2\pi j l / k_m)}; l = 0, 1, \dots, k_m - 1\}; m = 1, 2, \dots, M$$

се наричана обобщен комплементарен сигнал, ако:

$$R_c(r) = \sum_{m=1}^M R_{A_m A_m}(r) = \begin{cases} N_{sum} = N_1 + N_2 + \dots + N_M, & r = 0; \\ 0, & r = 1, 2, \dots, \max\{N_m\}. \end{cases} \quad (2)$$



Фиг. 2. АКФ на сигнали на Голай с дължина  $N=10$

С други думи при обобщените комплементарни сигнали броят на сигналите е  $M \geq 2$ , а използваната фазова модулация може да бъде на  $m$  нива като  $m \geq 2$  (m-ary phase shift keying – m-PSK). От това следва, че ако едно множество от **ФМ** сигнали е комплементарно, тогава и множеството от техните периодични продължения също има идеална сумарна **ПАКФ**.

Положителните свойства на **ФМ** комплементарни сигнали могат да се систематизират както следва:

- Симетрично сигнално съзвездие, което осигурява простота и икономическа ефективност на практическата им реализация;
- Алгоритми, които позволяват да се синтезира множество от комплементарни сигнали с голяма дължина на базата на известно начално множество от комплементарни сигнали с малка дължина.
- Малки стойности на **PAPR**, както при цифрови така и при аналогови **OFDM** системи.

Методите за генериране и приемане на комплементарните сигнали на Голай, използвани в комуникационните системи с **OFDM**, се основават на следната теорема 1:

Нека

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 2^{h-1} \sum_{k=1}^{m-1} x_{\pi(k)} x_{\pi(k+1)} + \sum_{k=1}^m c_k x_k \quad (3)$$

е функция, чиито аргумент  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $\forall x_k \in \{0, 1\}$  преминава последователно през всички елементи (точки) на крайното алгебрично поле  $GF(2^m)$ ,  $\pi$  е произволна пермутация на числата  $\{1, 2, \dots, m\}$  и  $\forall c_k \in \mathbb{Z}_2^h$ . Тогава функциите

$$\begin{aligned} f_{\mu}(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) + c, \\ f_{\eta}(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) + 2^{h-1} x_{\pi(1)} + c' \end{aligned} \quad (4)$$

представяват характеристичните последователности на комплементарна двойка на Голай при  $c, c' \in Z_{2^h}$ .

Теорема 1 ще бъде пояснена със следния пример.

Нека в (1) стойностите на основните параметри са  $m = 3, h = 2$ . В тази ситуация елементитена  $GF(2^3)$  са  $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (0,0,1), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)$ , а всички аритметични операции в (1) и (2) се изпълняват по модул  $2^h = 2^2 = 4$ . Освен това, тъй като всички възможни пермутации на числата  $\{1, 2, 3\}$  са

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{3, 1, 2\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 2, 1\} \quad (5)$$

нека приемем, че се използва третата пермутация, т.е.

$$x_{\pi(1)} = x_2, \quad x_{\pi(2)} = x_1, \quad x_{\pi(3)} = x_3 \quad (6)$$

Накрая нека допуснем, че

$$c_1 = 3, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 3, \quad c = 3, \quad c' = 0 \quad (7)$$

При този избор на параметрите функциите (2) имат следната конкретна форма

$$\begin{aligned} f_{\mu}(x_1, x_2, x_3) &= 2(x_2x_1 + x_1x_3) + 3(x_1 + x_2 + x_3) + 3, \\ f_{\eta}(x_1, x_2, x_3) &= 2(x_2x_1 + x_1x_3) + 3(x_1 + x_2 + x_3) + 2x_2 + 3, \end{aligned} \quad (8)$$

като всички аритметични операции се изпълняват (привеждат) по модул  $2^h = 2^2 = 4$ .

Последователностите  $f_{\mu}$  и  $f_{\eta}$  формирани чрез привеждане на стойностите на полиномите (8) по модул 4, когато координатите на аргумента  $x = (x_1, x_2, x_3)$  се изменят в така наречения лексикографски ред, при който  $(x_1, x_2, x_3)$  се разглежда като двоично число  $I$ , изменящо се последователно от  $(0,0,0)$  до  $(1,1,1)$ , имат дължина

$$N = 2^m = 2^3 = 8 \quad (9)$$

и са представени в шестата и осмата колони на таблица 1.

**Таблица 1.** Последователности, генерирани чрез полиномите (6)

$I$	$(x_1, x_2, x_3)$	$2(x_1x_2 + x_1x_3)$	$3(x_1 + x_2 + x_3)$	$c = 3$	$f_{\mu}$	$2x_2$	$f_{\eta}$
0	(0, 0, 0)	0	0	3	3	0	3
1	(1, 0, 0)	0	3	3	2	0	2
2	(0, 1, 0)	0	3	3	2	2	0
3	(1, 1, 0)	2	6	3	3	2	1
4	(0, 0, 1)	0	3	3	2	0	2
5	(1, 0, 1)	2	6	3	3	0	3
6	(0, 1, 1)	0	6	3	1	2	3
7	(1, 1, 1)	4	9	3	0	2	2

Съгласно теорема 1 последователностите  $f_\mu$  и  $f_\eta$  са характеристични последователности. Това означава, че  $f_\mu$  и  $f_\eta$  управляват фазовата манипулация на елементарните фазови импулси (чипове) на следните два **ФМ** сигнала

$$\begin{aligned} \mu(l) &= e^{j\frac{2\pi}{2^h}f_\mu(l)} = e^{j\frac{\pi}{2}f_\mu(l)} = j^{f_\mu(l)}, \\ \eta(l) &= e^{j\frac{2\pi}{2^h}f_\eta(l)} = e^{j\frac{\pi}{2}f_\eta(l)} = j^{f_\eta(l)}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad l = 0, 1, \dots, 7 \end{aligned} \quad (10)$$

Отчетите на **ФМ** сигнали, изчислени по (10) в съответствие с характеристичните последователности от таблица 1, са представени в таблица 2.

**Таблица 2.** Отчети на ФМ сигналите, изчислени по (10) в съответствие с характеристичните последователности от табл. 1

$l$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_\mu(l)$	3	2	2	3	2	3	1	0
$\mu(l)$	-j	-1	-1	-j	-1	-j	j	1
$f_\eta(l)$	3	2	0	1	2	3	3	2
$\eta(l)$	-j	-1	1	j	-1	-j	-j	-1

**АКФ** на **ФМ** сигнали (10) и тяхната сума са представени в таблица 3 като за по-добра прегледност са показани само страничните листа с неотрицателни номера предвид на симетрията на **АКФ**. Както се вижда, всички странични листа на сумарната **АКФ** са 0 и, следователно, сигналите  $\{\mu(l)\}_{l=0}^7$  и  $\{\eta(l)\}_{l=0}^7$  представляват комплементарна двойка.

**Таблица 3.** АКФ на ФМ сигналите (10)

$k$ или $l$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\{\mu(l)\}_{l=0}^{N-1}$	-j	-1	-1	-j	-1	-j	j	1
$\{\eta(l)\}_{l=0}^{N-1}$	-j	-1	1	j	-1	-j	-j	-1
$R_{\mu\mu}(k)$	8	j	2	-j	0	j	-2	-j
$R_{\eta\eta}(k)$	8	-j	-2	j	0	-j	2	j
$R_c(k)$	16	0	0	0	0	0	0	0

От теорема дадена по-горе произтича следното следствие 1 .  
Нека

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 2^{h-1} \sum_{k=1}^{m-1} x_{\pi(k)} x_{\pi(k+1)} + \sum_{k=1}^m c_k x_k \quad (11)$$

е функция, чиито аргумент  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $\forall x_k \in \{0, 1\}$  преминава последователно през всички елементи (точки) на крайното алгебрично поле  $GF(2^m)$ ,  $\pi$  е

произволна пермутация на числата  $\{1, 2, \dots, m\}$  и  $\forall c_k \in Z_{2^h}$ . Тогава функциите

$$\begin{aligned} f_{\mu}(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) + c, \\ f_{\mu}(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) + 2^{h-1}(x_{\pi(1)} + x_{\pi(m)}) + c, \quad c \in Z_{2^h} \end{aligned} \quad (12)$$

формират характеристичните последователности на комплементарна двойка на Голай с всяка от характеристичните последователности на функциите

$$\begin{aligned} f_{\eta}(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) + 2^{h-1}x_{\pi(1)} + c', \\ f_{\mu}(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) + 2^{h-1}x_{\pi(m)} + c', \quad c' \in Z_{2^h} \end{aligned} \quad (13)$$

Следствие 1 изчерпателно определя

$$K_{GPs} = \frac{2^{h(m+2)} \cdot m!}{2} \quad (14)$$

комплементарни **ФМ** сигнала, които имат дължина  $N=2^m$  и се генерират чрез използване на фазова манипулация на  $2^h$  нива ( $2^h-PSK$ ). Следва дебело да се подчертае, че един **ФМ** сигнал с характеристична последователност (12) или (13) участва във формирането на няколко комплементарни двойки. Всъщност различни са само **ФМ** сигнали с характеристични последователности или  $f_{\mu}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  или  $f_{\eta}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , зададени с (13). Не е трудно да се установи, че техният брой е]

$$K = \frac{2^{h(m+1)} \cdot m!}{2} \quad (15)$$

Действително, коефициентите  $\{c, c_1, c_2, \dots, c_m\}$  (или  $\{c', c_1, c_2, \dots, c_m\}$ ) в (12) и (13) могат да се изберат по  $2^{h(m+1)}$  начина, а пермутациите, които водят до различни квадратични функции в (11) са  $m!/2$  на брой. Например, вече беше отбелязано, че всичките възможни пермутации на числата  $\{1, 2, 3\}$ , посочени в (13), са общо  $3! = 1.2.3 = 6$ . При това обаче пермутациите  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{3, 2, 1\}$  формират една и съща квадратична функция  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$ . Аналогично пермутациите  $\{1, 3, 2\}$ ,  $\{2, 3, 1\}$  формират квадратичната функция  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + x_2x_3$ , а пермутациите  $\{2, 1, 3\}$ ,  $\{3, 1, 2\}$  - квадратичната функция  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$ .

За краткост с  $w$  се отбелязва максималната степен на 2, при която е изпълнено

$$2^w \leq \frac{m!}{2} \quad (16)$$

В таблица 4 са дадени стойностите на  $m!/2$  и  $w$  за  $2 \leq m \leq 13$ .

Таблица 4. Стойности на  $m!/2$  и  $w$  за  $2 \leq m \leq 13$

<b><math>m</math></b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
$m!/2$	1	3	12	60	360	2520
$w$	0	1	3	5	8	11
<b><math>m</math></b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>
$m!/2$	20160	181440	1814400	19958400	239500800	3113510400
$w$	14	17	20	24	27	31

От направения дотук анализ произтича следният метод за генериране на **OFDM** сигнали с  $PAPR \leq 2$ .

#### МЕТОД ЗА ГЕНЕРИРАНЕ НА OFDM СИГНАЛИ С $PAPR \leq 2$

1. В зависимост от броя на подносещите честоти  $M$  се изчислява стойността на параметъра  $m$

$$M = 2^m \quad (17)$$

2. В множеството на всички пермутации на числата  $\{1, 2, \dots, m\}$ , водещи до различни функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  в (1), се избират  $2^w$  различни пермутации.

3. Потокът от битове на входа на предавателя се разбива на групи от по  $w+h(m+1)$  бита, като всяка група се предава за един тактов интервал  $T_s$ . Първите  $w$  бита определят конкретната пермутация, която ще се използва във функцията  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  от (3). Останалите  $h(m+1)$  се разделят на  $m+1$  подгрупи по  $h$  бита всяка и всяка подгрупа задава стойността на един от коефициентите  $\{c, c_1, c_2, \dots, c_m\}$  (или  $\{c', c_1, c_2, \dots, c_m\}$ ) в (3) и (4).

4. След определяне на функцията  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  в (3) и на коефициентите  $\{c, c_1, c_2, \dots, c_m\}$  (или  $\{c', c_1, c_2, \dots, c_m\}$ ), по формула (4) се изчислява една характеристична последователност  $f_{\mu}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  (или  $f_{\eta}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ) с дължина  $N = 2^m = M$ .

5. Изчисляват се конкретните стойности на отчетите на цифровия сигнал  $X_k[l]$ :

$$X_k(i) = e^{j \frac{2\pi}{2^h} f_{\mu}(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, N = M, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

които се използват за квадратурна модулация на  $i$ -тата подносеща честота в  $k$ -тия тактов интервал  $T_s$ .

От изложеното се вижда, че при използване на горния метод във всеки тактов интервал  $T_s$  от предавателя към приемника се пренасят по  $w+h(m+1)$  бита информация. Следователно, относителната скорост  $C$  на предаване на информацията е

$$C = \frac{w+h(m+1)}{M} = \frac{w+h(m+1)}{2^m} \quad (19)$$

тъй като в най-обща ситуация с  $M$  подносици честоти могат да се пренесат  $M$  бита за един тактов интервал.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен е метод за генериране на **OFDM** сигнали с  $PAPR \leq 2$ . Предложеният метод осигурява добра шумоустойчивост на **OFDM** системата /Системата продължава да работи правилно дори ако са сгрешени  $\sqrt{M}$  бита/, - високо бързодействие и ниска цена.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] Михаил Илиев. Анализ на механизмите за намаляване на междусимволната интерференция в системи с ортогонално честотно мултиплексиране, Journal of the Technical University at Plovdiv "Fundamental Sciences and Applications", Vol. 16, book 1, 2011 ISSN1310-8271, 265-268.

[2] Mihail P. Iliev. Extending the lifetime of wireless sensor networks by using a modified method for hierarchical organization of the system in clusters unequal number devices, Proceedings of the Union of Scientists – Ruse, Book 5 Mathematics, Informatics and Physics, Volume 8, 2011, ISSN 1311-9974, pp 55-59.

[3] B. Bedzhev, M. Iliev, S. Yordanov, V. Hadzhivasilev. Method for Synthesis of Signals Possessing Ideal Periodic Autocorrelation Function and Small Alphabet, INFORMATION, COMMUNICATION AND CONTROL SYSTEMS AND TECHNOLOGIES, UNIVERSITY OF RUSE, N1, 2012, pp.37-40, ISSN 1314-7455

[4] Mihail P. Iliev, Nikolay R. Nikolov, Tsvetoslav Sv.Tsankov. Hardware implementation of the shrinking-multiplexing generator of pseudo-random sequences, E+E, бр. 7-8, 2011г. pp 29-33

[5] M. Iliev, B. Bedzhev, T. Trifonov, L. Staneva. Algorithm for Synthesis of Families of Frequency Hopping Signals with ideal Periodic Correlation Properties, INFORMATION, COMMUNICATION AND CONTROL SYSTEMS AND TECHNOLOGIES, UNIVERSITY OF RUSE, N2, 2013, pp. 7-12, ISSN 1314-7455

[6] Iliev M., V. Hadzhivasilev, "A Novel PTS Scheme for PAPR Reduction in OFDM Systems", First International Conference on Telecommunication and Remote Sensing, 29-30 August, Sofia, 2012, pp. 170-174

[7] Iliev M., B. Bedzhev, V. Hadzhivasilev, S. Yordanov, "PAPR Reduction of OFDM Signals Using Modified Partial Transmit Sequences", ICCST Year I, No.1, 2012, pp. 26-29, ISSN 1314-7455

[8] Iliev M., V. Hadzhivasilev, "PAPR Reduction of OFDM Signals by PTS with Recursive Phase Weighting Method", 2013

### За контакти:

проф. д-р Михаил Илиев, Катедра "Телекомуникации", Русенски университет "Ангел Кънчев", тел.: 082-888 457, e-mail: miliev@uni-ruse.bg

**Докладът е рецензиран.**