SAT-1.307-2-MME-05

Опитна уредба за определяне на собствените честоти на конзолна греда с равнораменен ъглов профил на напречното сечение

Светлин Стоянов

Experimental setup for the determination of the natural frequencies of a cantilever beam

Svetlin P. Stoyanov

Abstract: *An experimental setup for the determination of the natural frequencies of a cantilever beam is created. This paper contains a description of the setup. An experimental modal analysis with the aim of this setup is conducted. A harmonic analysis is performed using the Fast Fourier Transform algorithm in Matlab and the spectrograms of the vibrations are obtained. Also, the raw signal is filtered through a bandpass filter for a separation of the harmonics in the time domain. This is necessary for obtaining of the logarithmic time decay and the damping ratio.*
Keywords: *experimental modal analysis, natural frequencies, cantilever beam, harmonic analysis, Fast Fourier Transform, spectrograms, bandpass filter, logarithmic time decay, damping ratio, frequency equation, Krilov's functions, Matlab, LabView.*

1. Въведение

През 2011 г., в [3] бе представена опитна уредба за анализ на най-елементарните трептения – свободни трептения на дискретна маса, установена на еластичен елемент. Четири години по-късно, през 2014 г., в [6] е описана уредба за анализ на принудени трептения и демонстрация на явленията **резонанс** и **виброизолация**. Тези разработки използват дискретни модели на механични системи. Представената в този доклад работа, визира трептения на непрекъснат модел и има за **цел** създаване и изследване на опитна уредба за определяне на **собствените честоти** на конзолна греда. Такава опитна уредба би послужила за провеждане на лабораторни упражнения по динамика на греди, която е част от динамиката на строителните конструкции и от динамиката на машините.

Един цикъл упражнения по **експериментален модален анализ** би могъл да започва с греда на две опори, тъй като нейното честотно уравнение има просто аналитично решение, а собствените и форми са хармонични функции. След това ще се премине към конзолно закрепена греда, чието честотно уравнение няма точно аналитично решение и решаването му ще се извършва числено посредством софтуерната система *Matlab*. Цикълът от упражнения ще завърши с модален анализ на ставно-прътова конструкция. За теоретичното определяне на нейните собствени честоти и форми ще се използва метод на крайните елементи. Така планирани, упражненията ще използват няколко съвременни инженерни софтуерни системи (*Matlab*, *Abaqus*, *LabView*), т.е. ще се реализира компютърно съпроводено обучение [2].

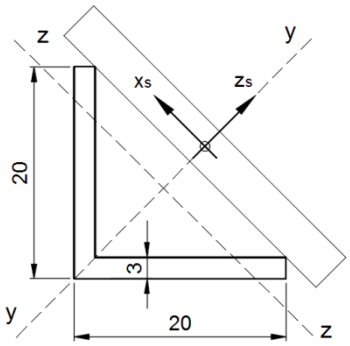
Поради ограничения обем на този доклад, от съществуващите разработки относно модален анализ на конзолна греда и приложението му в учебния процес, тук ще бъде отбелязан само института *Rourkela* (Ориса, Индия), където са създадени реална и виртуална лаборатория за провеждане на упражнения и разработване на дипломни работи на тази тема [5].

2. Описание на опитната уредба

Опитната уредба се състои от конзолна гледа с дължина L = 600 mm, датчик за ускорение (акселерометър) и устройство за запис на данните – фиг. 1. Схемата на

напречното сечение на гредата и ориентацията на датчика са показания на фиг. 2. По своята ос z_s датчика измерва ускорението на напречните огъвни трептения около главната централна инерционна ос z на сечението. По ос x_s – около главната централна инерционна ос y на сечението. Модула на еластичност на материала е определен предварително посредством прилагане на статична сила и има стойност E = 220 GPa. Датчика за ускорение има инкремент 0.01 m/s^2 и е свързан към устройство *Vernier VabQuest 2.0* за запис и обработка на данните.

Фиг. 1. Фотография на опитната уредба



Фиг. 2. Установяване на датчика

3. Методика на експерименталното изследване

Свободните трептения на дадена точка от гредата са полихармонични, т.е. представляват сума от хармоници. Тези хармоници могат да бъдат отделени посредством правото преобразуване на Фурие и могат да бъдат представени посредством спектрограмата на трептенията. Честотите на тези хармоници са **честотите на свободните трептения** на гредата.

Собствените честоти на гредата се получават посредством решаване на честотното уравнение, което, както е добре известно, се извежда без отчитане на разсейването на енергия. Поради това, техните стойности са по-големи в сравнение с честотите на свободните трептения. Разликата обаче е малка и често бива пренебрегвана. Все пак малко и голямо са относителни и дори неясни понятия и поради това в настоящото изследване влиянието на разсейването на енергия ще бъде отчетено.

Собствените честоти могат да бъдат изчислени, ако преди това се определи **логаритмичния декремент на затихването** на всеки един от хармониците съставящи полихармоничното свободно трептене на гредата. За целта, първо трябва да се реализира филтриране за отделяне на време-диаграмите на тези хармоници, след това да се построи обвиващата крива на всяка една от диаграмите. При този начин на определяне на загубите на енергия се работи с време-диаграмите, но съществуват и подходи при които се използват спектрограмите на трептенията, т. е. работи се в честотната област [4].

Ако точката в която е установен датчика, съвпада с възел на дадена собствената форма, хармоник с честотата на тази собствена форма няма да присъства. Поради това, датчикът трябва да бъде поставен в точка, която не е възел на нито една от собствените форми, чиито честоти ще се определят.

Датчикът е свързан към устройство *Vernier VabQuest 2.0*. То може да работи в един от следните два режима: като самостоятелно (stand-alone) устройство, при което записва данните в своята памет или като междинно устройство, което буферира и предава данните към компютър за визуализация и обработка в „реално време“. За реализиране на втория вариант, а именно работа в „реално време“, е

създаден софтуер на *LabView,* който извършва право преобразуване на Фурие и визуализира получените спектрограми. При използване на устройството в режим на самостоятелна работа, след приключване на опитите, данните се свалят на компютър като текстови файлове и са импортират в *Matlab*, където освен преобразуване на Фурие за получаване на спектрограмите се реализира и гореспоменатото филтриране за отделяне на време-диаграмите на хармониците и определяне на логаритмичния декремент на затихването.

4. Теоретично определяне на собствените честоти

Датчика за ускорение представлява концентрирана маса в левия край на гредата, т.е. гредата е натоварена с постоянна сила – теглото на датчика. За извеждане на честотното уравнение може да се използва уравнението на принудените трептения на еластична греда, получено посредством метода на началните параметри [1]. При това, честотата на смущаващата сила е равна на нула, тъй като теглото на датчика е постоянна сила. Тогава честотното уравнение има следния вид:

$$\begin{vmatrix} A(kL) + kL\dfrac{m_1}{mL}D(kL) & B(kL) \\ D(kL) + kL\dfrac{m_1}{mL}C(kL) & A(kL) \end{vmatrix} = 0,$$

където: $A(kL) = \frac{1}{2}\big(cosh(kL) + cos(kL)\big)$, $\mathrm{B}(kL) = \frac{1}{2}\big(sinh(kL) + sin(kL)\big)$, $\mathrm{C}(kL) = \frac{1}{2}\big(cosh(kL) - cos(kL)\big)$, $\mathrm{D}(kL) = \frac{1}{2}\big(sinh(kL) - sin(kL)\big)$ са функциите на Крилов; m – масата на гредата на линеен метър; m_1 – масата на датчика;

Посредством числено решаване на това честотно уравнение са определени характеристичните числа k, а в последствие и теоретичните стойности на собствените честоти f_t на гредата – табл. 1.

5. Експериментално определяне на собствените честоти, посредством представената уредба и сравнителен анализ

5.1. Експериментално определяне честотите на свободните трептения

Време-диаграмата на ускорението на огъвните трептения около ос z на крайната точка от гредата е представена на фиг. 3а, а съответстващата и спектрограма – на фиг. 3б. Пиковете на тази спектрограма показват честотите f_{exp} на свободните трептения на гредата. Техните стойности са дадени също в табл. 1.

5.2. Филтриране и определяне на собствените честоти

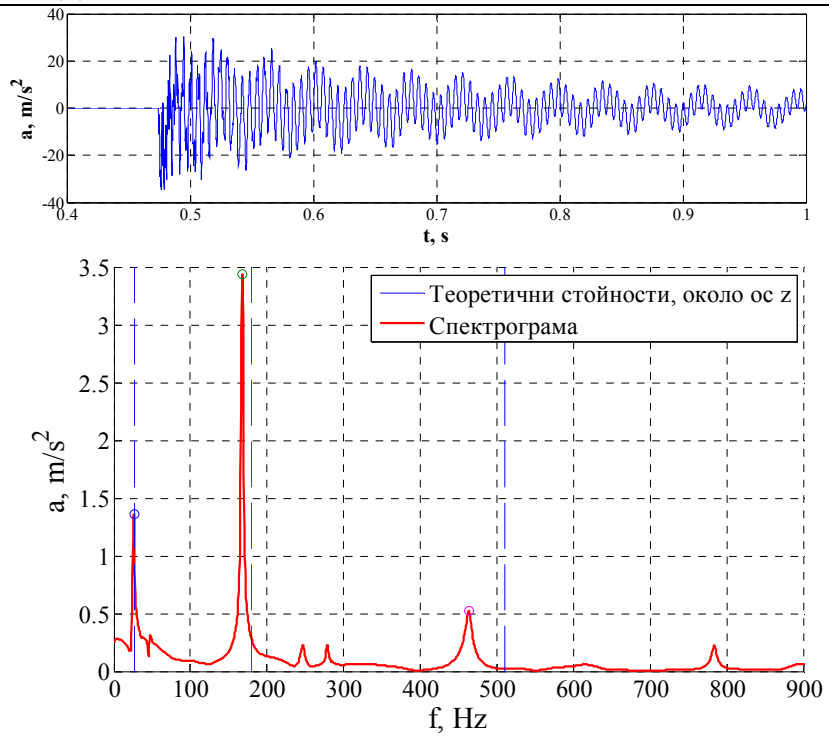
Посредством лентов (bandpass) филтър, време-диаграмите на хармониците са отделени (фиг. 4) и е определен логаритмичния декремент на затихване и коефициентите характеризиращи загубата на енергия.

В руската литература се работи с коефициента на затихване

$$n = \frac{\omega}{2\pi}\ln\frac{a_1}{a_2}$$

и собствената честота се определя от решението на характеристичното уравнение на диференциалното уравнение на свободните трептения в съпротивителна среда, т.е. по зависимостта:

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 + n^2}.$$



а

б

Фиг. 3. Експериментално определено ускорение: а – време-диаграма; б – спектрограма и сравнителен анализ – с вертикалните пунктирани линии са представени теоретично определените стойности на собствените честоти, а с плътната червената линия – спектрограмата на измереното ускорение

Табл. 1. Теоретични и експериментални данни, сравнителен анализ

f_{exp}	26.25	167.85	463.26
f_t	27.55	178.64	510.89
$(f_{exp} - f_t) / f_{exp}$, %	-5.0	-6.4	-10.3

В американската литература се използва коефициента на демпфиране (damping ratio)

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a_1}{a_2}$$

и собствената честота се изчислява по зависимостта:

$$\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta}}.$$

Таблица 2.Собствени честоти, сравнителен анализ

n, rad/s	0.1735	0.5534	5.1761
ζ	0.006	0.0033	0.0112
f_{exp}, Hz	**26.2451**	**167.8467**	**463.2568**
$f_{natural}$, Hz	**26.2506**	**167.8509**	**463.2857**
$f_{natural} - f_{exp}$, Hz	**0.0055**	**0.0042**	**0.0289**

Коефициента на демпфиране има това предимство, че показва директно какво е движението, тъй като се дефинира като

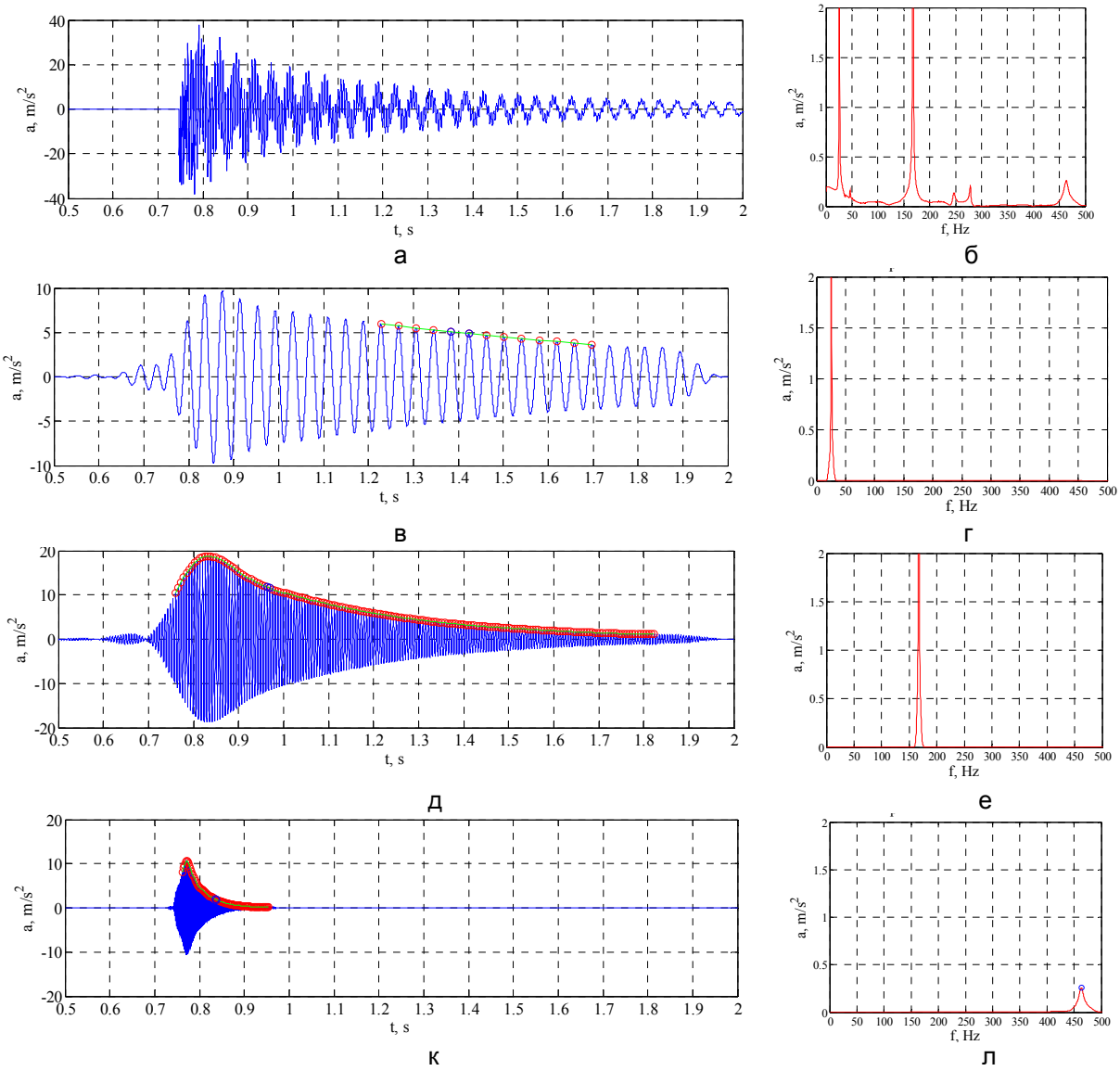
$$\zeta = \frac{k}{2m\omega} = \frac{n}{\omega}$$

и следователно при $\zeta < 1$ имаме затихващи трептения, при $\zeta = 1$ – гранично апериодично движение и при $\zeta > 1$ – апериодично движение.

За настоящото изследване, стойностите на тези коефициенти, собствените честоти и разликите спрямо определените в предходната точка честоти на свободните трептения са представени в табл. 2.

6. Заключение

Както се вижда от табл. 2, разликата между собствените честоти и честотите на свободните трептения не надхвърля 0.03 Hz или съответно 0.001%. Това показва, че тя с основание може да бъде пренебрегната в това изследване.



Фиг. 4. Филтриране на сигнала: а, б – нефилтриран сигнал; в, г, д, е, к, л – време-диаграми и спектрограми на отделните хармоници

Поради ограничения обем на този доклад, много въпроси остават незасегнати: представени са само трептенията около ос *z*, тъй като те съдържат най-ниската собствена честота на гредата; не е описан избора на стойностите на параметрите на филтъра; теоретичното определяне на собствените честоти е само маркирано; не са описани изследването на влиянието на масата на датчика върху собствените честоти, а също така и възможността за установяване на датчика в обща позиция и едновременно измерване на трептенията около двете главни централни оси. Това изисква подробно представяне на цялата разработка в отделна статия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Върбанов, Хр. Устойчивост и динамика на еластичните системи. Техника, С., 1989.

[2] Караколева, С. Доказване ефективността на компютърно съпроводено обучение по Висша математика в Русенски Университет. Научни трудове на Русенския университет, Русе, том 54, серия 6.1, 2015, стр. 90-95.

[3] Стоянов, Св., Ст. Стоянов. Опитна уредба за изследване на трептения. Научни трудове на русенския университет, Русе, том 50, серия 2, 2011, стр. 38–40.

[4] Arora, V. Structural damping identification method using normal FRFs. International Journal of Solids and Structures, 51 (2014), 133–143.

[5] Satpathy, S. Dynamic analysis of cantilever beam and its experimental validation. A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of bachelor of technology in mechanical engineering, Department of mechanical engineering at national institute of technology Rourkela, 2014.

[6] Stoyanov, Sv. Vibration isolation experimental setup. Научни трудове на русенския университет, том 53, серия 2, 2014, стр. 28–32.

За контакти: Гл. ас. д-р инж. Светлин Стоянов, Катедра “Техническа механика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, e-mail: SStoyanov@uni-ruse.bg.