

FRI-1.417-1-MEMBT-11

---

## MODELING AND INVESTIGATION OF INERTIAL TAMPING MACHINE<sup>10</sup>

---

### **Prof. Ivelin Ivanov, PhD**

Department of Engineering Mechanics,  
University of Ruse, Ruse  
Tel.: +359 82 888-472  
E-mail: ivivanov@uni-ruse.bg

### **Assistant Prof. Svetlin Stoyanov, PhD**

Department of Engineering Mechanics,  
University of Ruse, Ruse  
Phone: 088 754 9965  
E-mail: sstoyanov@uni-ruse.bg

***Abstract:** A mathematical model describing the law of motion of inertial force driven machine is developed. This model allows the important characteristics of the motion to be calculated and the tamping capacity of a machine to be determined. The impact velocity and the impact kinetic energy can be calculated. This mathematical model is derived with the assumption that the contact with the tamped surface is fully plastic, i.e. there is no elastic restoring forces and therefore the initial velocity of each motion cycle is zero. Actually, the restoring elastic forces exist, and in order to consider them, a finite element model is created and studied.*

***Keywords:** Tamping machine, Inertial forces, Impact velocity, Impact kinetic energy, Finite element model, Explicit dynamics.*

### **ВЪВЕДЕНИЕ**

В (Loukanov, I. A., 2016a) е изследвано инерционно задвижване на вибробот. Извършена е мултикритериална идентификация на стойностите на параметрите на експериментален модел на такъв робот (Loukanov, I. A., 2016b). Разработките са задълбочени в (Loukanov, I. A., 2016c). Като продължение на това направление, настоящото изследване има за цел да създаде математичен модел, даващ възможност за определяне ефективността на работата на инерционно задвижвана трамбовъчна машина.

Съществуващите изследвания по въпроса, масово касаят трамбовъчни машини задвижвани посредством коляно-мотовилков механизъм. Още в (Borg, J., 1997) е изследвана динамиката на такава машина. По-късно в (Debeleac, C., 2009) е представена разработка отчитаща някои нелинейности, а в (Wersäll, C., 2016) – оптимизационно изследване. Може да се формулира извод, че извършеното от авторите литературно проучване не установи съществуващо задоволително решение на проблема за теоретично определяне на ефективността на работа на инерционно задвижвана трамбовъчна машина. Това определя необходимостта от настоящото изследване, както и неговата структура, състояща се от две основни части:

1. Извеждане математичен модел, описващ закона на движение и определяне кинетичната енергия преди идеално пластичен удар с трамбованата повърхност;
2. Симулационно изследване посредством метода на крайните елементи при идеално еластичен удар чрез моделиране на ексцентриците като твърди тела за получаване на инерционната сила в резултат на тяхната ротация.

---

<sup>10</sup> Докладът е представен в секция Механика и машиностроителни технологии на 26 октомври 2018 с оригинално заглавие на български език: МОДЕЛИРАНЕ И ИЗСЛЕДВАНЕ НА ИНЕРЦИОННА ТРАМБОВЪЧНА МАШИНА

МАТЕМАТИЧЕН МОДЕЛ ПРИ ИДЕАЛНО ПЛАСТИЧЕН УДАР

1. Постановка на задачата

Трамбовъчната машина се задвижва от два вала с ексцентрично разположени маси, които се въртят с една и съща ъглова скорост  $\omega$ , но в противоположни посоки (Фиг. 1). Винаги при това въртене на валовете има едно направление  $d$ , в което ексцентричните маси  $m$  застават с успоредни рамена спрямо осите на валовете. Ъгълът спрямо хоризонта на това направление отбелязваме с  $\alpha$ . Този ъгъл може да се сменя със специално устройство и машината преминава от режим на движение напред в режим на движение назад и обратно.

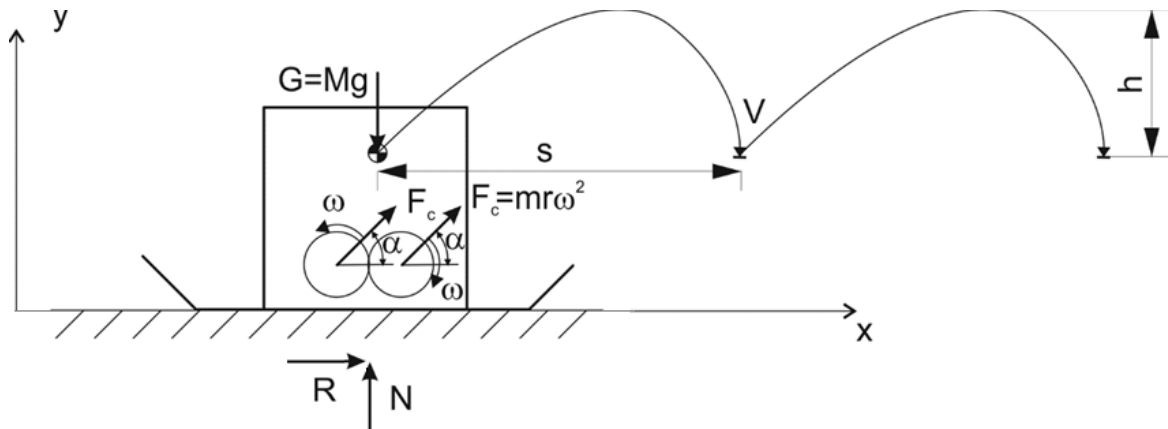
Проекциите на центробежните сили от двата вала върху направлението на движение  $d$  се събират и дават осцилиращата движеща сила  $F$  (Фиг. 2):

$$F = F_t \cos \omega t \tag{1}$$

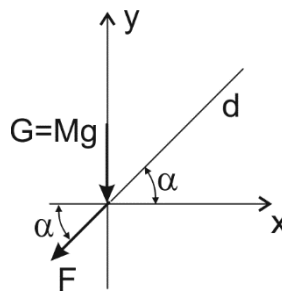
където

$$F_t = 2F_c = 2mr\omega^2 \tag{2}$$

е центробежната сила, а  $r$  е радиусът от оста на вала до центъра на тежестта на ексцентрично разположената маса. Проекциите на центробежните сили от двата вала в перпендикулярно на  $d$  направление се урівновесяват взаимно, но те натоварват ексцентричната кутия, в която са лагерувани валовете.



Фиг. 1. Схема на движение на трамбовъчна машина



Фиг. 2. Сили при движение като свободно тяло

Приемаме, че при работата си, трамбовъчната машина нанася удари по настилката, които са *идеално пластични*, т.е. цялата кинетична енергия преди удара се поглъща при уплътняване на настилката, машината не подскача и след всеки удар тя се намира в покой. Върху машината действат силата на теглото  $G = Mg$  и движещата сила  $F$ , които се урівновесяват от реакциите на настилката  $N$  и  $R$ , докато машината е в покой.

След като движещата сила  $F$  се насочи по положителните посоки на приетата координатна система  $xu$ , тя преодолява силата на теглото  $G$  и тогава започва движение на машината като свободно тяло. За да стане това, вертикалната проекция по оста  $y$  на

движещата сила трябва да е по-голяма от теглото на машината. За тези машини това винаги трябва да е спазено. При движението като свободно тяло върху машината действат само силата на теглото и движещата центробежна сила, които я ускоряват нагоре и напред до определен момент, когато започва обратно да се ускорява машината най-вече надолу и с придобитата от това негативна скорост тя се удря в настилката. При този удар се уплътнява настилката и приемайки, че цялата кинетична енергия се поглъща при удара, машината остава в покой, за да започне отново цикълът на отскок нагоре и напред и отново удар.

## 2. Диференциални уравнения на движението

Да проектираме силите при започване на движението на машината като свободно тяло по двете координатни оси. За да имаме само положително време  $t$  при движението приемаме, че движещата осцилираща сила  $F$  е насочена така, че има отрицателни проекции по осите  $x$  и  $y$ . Тогава имаме:

$$\sum X_i = -F \cos \alpha = -F_t \cos \alpha \cos \omega t \quad (3)$$

$$\sum Y_i = -F \sin \alpha - G = -F_t \sin \alpha \cos \omega t - Mg \quad (4)$$

Условието за започване на движението на машината като свободно тяло е  $\sum Y_i \geq 0$  или  $-F_t \sin \alpha \cos \omega t \geq Mg$

Тогава началният ъгъл и началният момент на това движение са:

$$\beta_0 = \arccos\left(-\frac{Mg}{F_t \sin \alpha}\right) = \arccos\left(-\frac{g}{Z_y}\right), \quad t_0 = \frac{\beta_0}{\omega}, \quad (5)$$

където

$$Z_y = \frac{F_t \sin \alpha}{M} \quad (6)$$

Написвайки закона на динамиката за двете направления  $x$  и  $y$ , можем да съставим диференциалните уравнения на движение, като ще въведем и началният ъгъл на завъртане на валовете, за да може времето  $t$  да се изменя от нула:

$$\ddot{x} = -\frac{F_t}{M} \cos \alpha \cos(\beta_0 + \omega t) \quad (7)$$

$$\ddot{y} = -\frac{F_t}{M} \sin \alpha \cos(\beta_0 + \omega t) - g \quad (8)$$

или

$$\ddot{x} = -Z_x \cos(\beta_0 + \omega t) \quad (9)$$

$$\ddot{y} = -Z_y \cos(\beta_0 + \omega t) - g \quad (10)$$

където

$$Z_x = \frac{F_t \cos \alpha}{M} \quad (11)$$

## 3. Закон за движение на машината

За да получим закона за движение на машината, трябва двукратно да интегрираме диференциалните уравнения, като при всяко интегриране ще се появят интеграционни константи. Тези константи се определят от началните условия. След първото интегриране получаваме:

$$\dot{x} = -\frac{Z_x}{\omega} \sin(\beta_0 + \omega t) + u_0 \quad (12)$$

$$\dot{y} = -\frac{Z_y}{\omega} \sin(\beta_0 + \omega t) - gt + v_0 \quad (13)$$

Тъй като тялото започва движението си от покой, то интеграционните константи  $u_0$  и  $v_0$  се определят от условието скоростите да са нули  $\dot{x} = 0$  и  $\dot{y} = 0$  при  $t = 0$ :

$$u_0 = \frac{Z_x}{\omega} \sin \beta_0 \quad (14)$$

$$v_0 = \frac{Z_y}{\omega} \sin \beta_0 \quad (15)$$

След още едно интегриране на уравненията получаваме закона за движение на машината:

$$x = \frac{Z_x}{\omega^2} \cos(\beta_0 + \omega t) + u_0 t + x_0 \quad (16)$$

$$y = \frac{Z_y}{\omega^2} \cos(\beta_0 + \omega t) - \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + y_0 \quad (17)$$

Интеграционните константи  $x_0$  и  $y_0$  се определят от условието преместванията да са нули  $x = 0$  и  $y = 0$  при  $t = 0$ :

$$x_0 = -\frac{Z_x}{\omega^2} \cos \beta_0 \quad (18)$$

$$y_0 = -\frac{Z_y}{\omega^2} \cos \beta_0 \quad (19)$$

#### ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ПАРАМЕТРИТЕ НА ТРАЕКТОРИЯТА

За да определим стъпката на машината, т.е. далечината на полета, трябва да решим уравнение (17) при  $y = 0$  за  $t$  и така да определим моментът  $t_t$ , когато машината удря настилката. Тогава стъпката  $s$  е

$$s = x(t_t) \quad (20)$$

Максималната стойност за  $y$  ни дава височината на полета  $h$  или амплитудата на ударите. Тя може да се намери, ако се реши уравнение (13) за  $\dot{y} = 0$  и се определи  $t_m$ , а после

$$h = y(t_m) \quad (21)$$

И двете уравнения (13) и (17) са трансцедентни и могат да бъдат решени само числено с прилагане на числени методи за намирането на корените на една функция или нейният глобален максимум.

Енергията на удара е равна на кинетичната енергия на машината преди удара:

$$E = \frac{MV^2}{2} \quad (22)$$

където

$$V^2 = \dot{x}^2(t_t) + \dot{y}^2(t_t) \quad (23)$$

е квадрата на скоростта преди удара.

Един цикъл на удар на машината по настилката е време  $t_c$  малко по-голямо от времето за движение като свободно тяло  $t_t$  и кратно на периода за завъртане на ексцентриките валове:

$$t_p = \frac{2\pi}{\omega} \quad (24)$$

т.е.

$$t_c = k t_p \quad (25)$$

където

$$k = \text{int} \left( \frac{t_t}{t_p} \right) + 1 \quad (26)$$

е цялото частно от делението на времената, увеличено с единица.

Следователно мощността, която консумира машината за да уплътнява настилката е:

$$P = \frac{E}{t_c} \quad (27)$$

Тогава средния съпротивителен момент за въртенето на ексцентриковите валове е:

$$T = \frac{P}{\omega} \quad (28)$$

### РЕЖИМ НА ПЛЪЗГАНЕ НА МАШИНАТА

Малко преди да започне движението на машината като свободно тяло има един период от време, в който машината се плъзга по настилката. Това става след като постоянно намаляващата нормална сила  $N$

$$N = F_t \sin \alpha \cos \omega t + Mg \quad (29)$$

не може да осигури удържаща сила на триене при покой

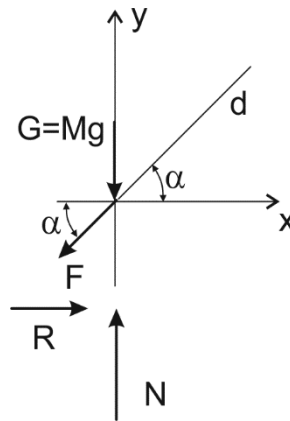
$$R = \mu_0 N$$

която да е по-голяма от проекцията по  $x$  на движещата сила  $F$  (Фиг. 3):

$$-F_t \cos \alpha \cos \omega t$$

Тогава диференциалното уравнение на движението е само едно и то е:

$$M\ddot{x} = -F_t \cos \alpha \cos \omega t - R = -F_t \cos \alpha \cos \omega t - \mu N \quad (30)$$



Фиг. 3. Сили действащи в режим на плъзгане

Ако пренебрегнем разликата между коефициента на триене при покой  $\mu_0$  и коефициента на триене при плъзгане  $\mu$ , то това плъзгане започва при ъгъл на завъртане  $\beta_1$  или в момента  $t_1$ :

$$-F_t \cos \alpha \cos \beta_1 = \mu N$$

$$-F_t \cos \alpha \cos \beta_1 - \mu F_t \sin \alpha \cos \beta_1 = \mu Mg$$

$$\beta_1 = \arccos \frac{\mu Mg}{-F_t(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} \quad (31)$$

$$t_1 = \frac{\beta_1}{\omega} \quad (32)$$

Времето за ускоряване в режима на плъзгане на машината ( $t_1 - t_0$ ) е много малко и машината не достига съществени хоризонтални скорости и премествания. Затова този режим на движение на машината може просто да се пренебрегне и параметрите на траекторията на движение като свободно тяло са определящи като характеристики на трамбовъчната машина.

### ВЕРИФИКАЦИЯ НА МАТЕМАТИЧНИЯ МОДЕЛ

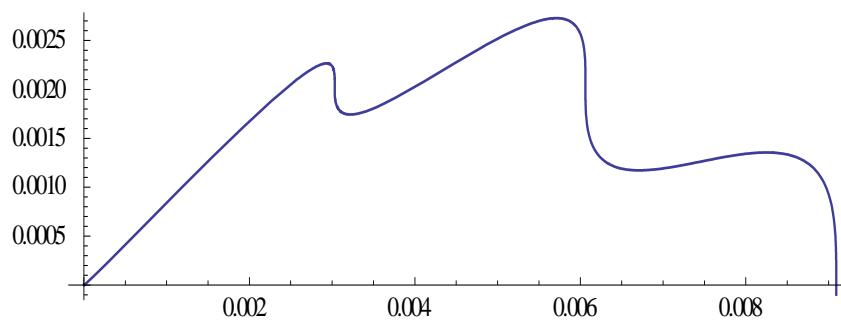
За да се провери математичният модел изведен тук, е използван софтуер за символна математика. Решен е конкретен пример, при който са зададени:

$$M = 470 \text{ kg}, \omega = 435,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, m = 2 \times 2,25 \text{ kg}, r = 35,828 \text{ mm}, \alpha = 45^\circ$$

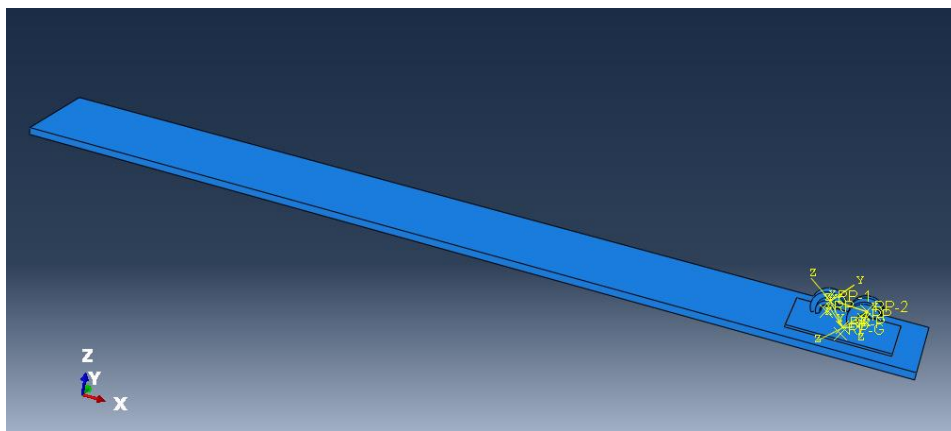
Получени са следните резултати:

$$F_t = 61,1 \text{ KN}, s = 9,09 \text{ mm}, h = 2,73 \text{ mm}, V_y = -424 \text{ mm/s}$$

Траекторията е дадена на Фиг. 4 и показва едно доста сложно движение траещо три завъртания на ексцентриковите валове.



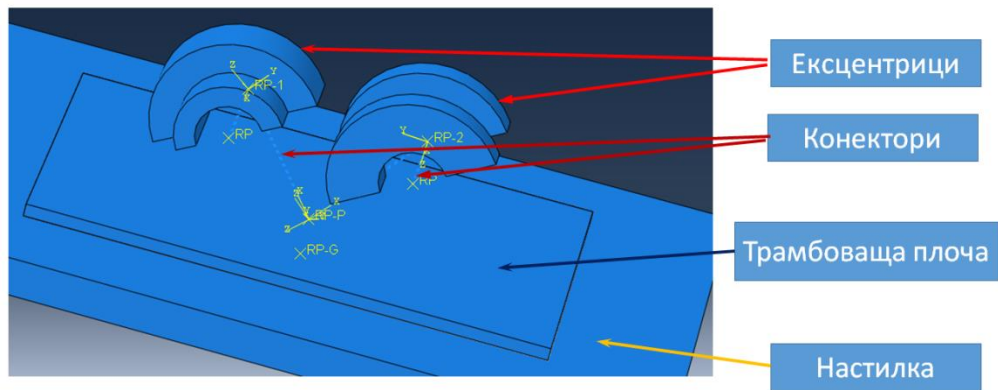
Фиг. 4. Траектория на машината според изчисленията (преместванията са в m)



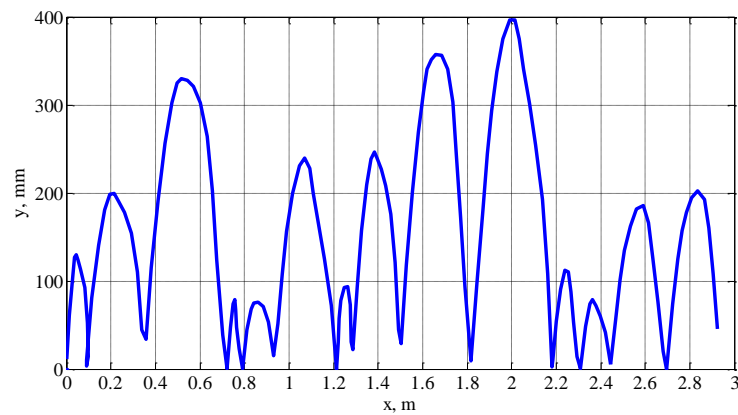
Фиг. 5. Крайно елементен модел

### СИМУЛАЦИОННО ИЗСЛЕДВАНЕ ПРИ ИДЕАЛНО ЕЛАСТИЧЕН УДАР

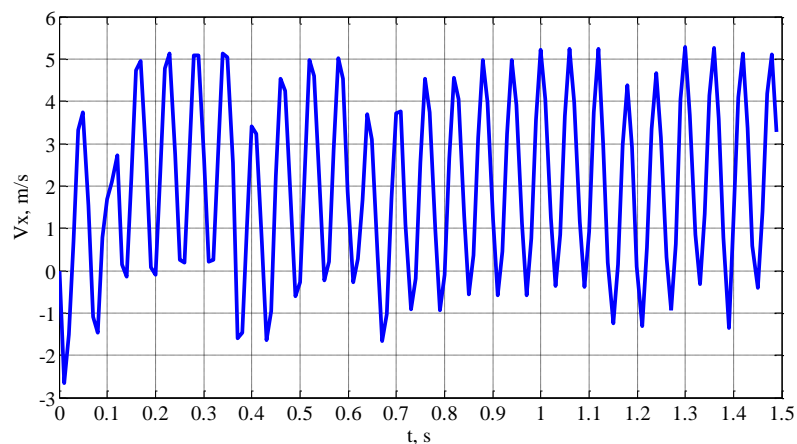
При приетата по-горе липса на еластична деформация на трамбованата настилка, всеки цикъл на движение започва без начална скорост. Реално, такава деформация има и всеки цикъл започва с някаква началната скорост, като тези скорости са различни и това води до нестационарно (хаотично) движение. За да се изследва това движение е създаден крайно елементен модел и неговата динамика е изследвана чрез явно интегриране във времето посредством ABAQUS/Explicit.



Фиг. 6. Твърдетелни модели на ексцентриците

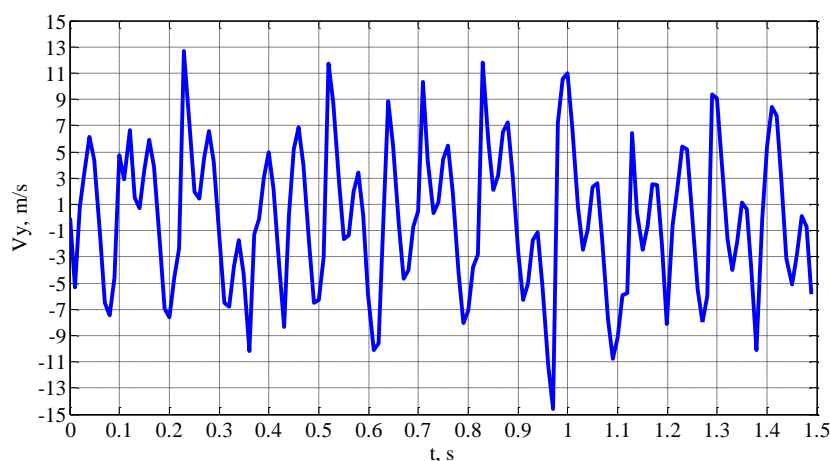


Фиг. 7. Траектория на движение



Фиг. 8. Скорост хоризонтална

В софтуерната система ABAQUS е изграден крайно елементен модел на сглобена единица (Фиг. 5), съдържащ твърдетелни модели на ексцентриците и еластични модели на трамбоващата плоча на машината и на настилката (Фиг. 6). Предимството на този подход е, че могат да бъдат зададени вискозни загуби на енергия, както и пластични деформации. Симулирано е движението на модела и са получени траекторията (Фиг. 7), хоризонталната (Фиг. 8) и вертикалната (Фиг. 9) скорости.



Фиг. 9. Скорост вертикална

## ИЗВОДИ

Изведен е математичен модел, описващ закона на движение при идеално пластичен удар между трамбоващата плоча на машината и настилката. Той дава възможност да бъдат определени характеристиките на движението на машината: период на движение; скорост на движение; скорост на влизане в контакт с настилката и съответстващата и кинетична енергия, която характеризира способността за трамбоване.

При така приетата липса на еластична деформация на трамбованата настилка, всеки цикъл на движение започва без начална скорост. Реално, такава деформация има и всеки цикъл започва с някаква началната скорост, като тези скорости са различни и това води до нестационарно (хаотично) движение. За да се изследва това движение е създаден крайно елементарен модел и неговата динамика е изследвана чрез явно интегриране във времето.

## REFERENCES

Borg, J., (1997). Dynamic behaviour of a soil comaction tamping machine. Master's degree thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Karlskrona, Sweden.

Debeleac, C., G. Oproescu (2009). Non-linear Behaviour of a Soil Compaction Equipment. 5th International Vilnius Conference EURO Mini Conference "Knowledge-Based Technologies and OR Methodologies for Strategic Decisions of Sustainable Development", Vilnius, Lithuania.

Loukanov, I. A., V. G. Vitliemov, I. V. Ivanov, (2016a). Dynamics of a Mobile Mechanical System with Vibration Propulsion (VibroBot). International Journal of Research in Engineering and Science (IJRES), Vol. 4, 2016, No 6, Ver. 3, pp. 44-51, ISSN 2320-9356.

Loukanov, I. A., V. G. Vitliemov, I. V. Ivanov, (2016b). Multi-criteria Identification of VibroBot Dynamic Characteristics. IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN), Vol. 6, 2016, No 7, Ver. 1, pp. 26-35, ISSN 2278-8719.

Loukanov, I. A., V. G. Vitliemov, I. V. Ivanov, (2016c). Dynamics of a Vibration-Driven One-way Moving Wheeled Robot. IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering, Vol. 13, 2016, No 3, pp. 14-22, ISSN 2320-334X.

Wersäll C., (2016) Frequency Optimization of Vibratory Rollers and Plates for Compaction of Granular Soil. Doctoral Thesis, Department of Civil and Architectural Engineering, Division of Soil and Rock Mechanics, Royal Institute of Technology, Stockholm.