FRI-1.405B-1-MIP-02

EXTREMAL PROBLEMS FOR THE CIRCLES INSCRIBED IN A GIVEN SEMICIRCLE OR IN A GIVEN SEGMENT

Assist. Prof. Todor Mitev PhD
Department of Mathematics,
"Angel Kanchev" University of Ruse
Ruse, Bulgaria,
e-mail: tmitev@uni-ruse.bg

Abstract:
Let the circles $K_1(O_1;r_1),\, K_2(O_2;r_2),\, ...,\, K_n(O_n;r_n)$ *are inscribed consequently in a given circle* K.
In present paper we find $\max\sum_{k=1}^{n} r_k$, $\max\sum_{k=1}^{n} r_k^2$ *for* $n=3$ *and* $\max\sum_{k=1}^{n} r_k$, $\max\prod_{k=1}^{n} r_k$ *for* $n=4$.
We prove and analogical problems for the circles inscribed in a given segment. More exactly we find:
$\max\sum_{k=1}^{n} r_k$, $\max\sum_{k=1}^{n} r_k^2$, $\max\prod_{k=1}^{n} r_k$ *for* $n=2$ *and* $\max\sum_{k=1}^{n} r_k$, $\max\prod_{k=1}^{n} r_k$ *for* $n=3$.

ВЪВЕДЕНИЕ

Комбинаторната геометрия е раздел от геометрията, в който се разглеждат задачи за намиране на „оптимални" (в някакъв смисъл) конфигурации от краен брой точки или геометрични фигури. Някои от най-известните задачи са: изопериметричната задача; задачите на Малфати, Лебег и Борсук. За повече информация предлагаме $[2]$, $[3]$ и цитираната в тях литература. В статията са разгледани задачи от комбинаторната геометрия за кръгове, вписани в даден полукръг (Гл.1) или в даден сегмент (Гл.2). Част от получените резултати са продължение на статия $[1]$.

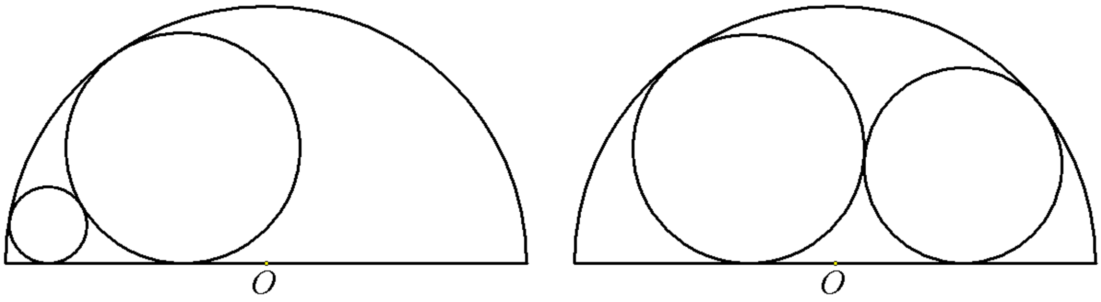
ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Кръгове вписани в даден полукръг.

Навсякъде по-долу ще считаме, че е даден полукръг K с център O и радиус R. Нека в K са вписани кръговете $K_1(O_1;r_1),\, K_2(O_2;r_2),\, ...,\, K_n(O_n;r_n)$ (за по-кратко $K_1, K_2, ..., K_n$) по долуописания начин. При $n=2$: K_1 и K_2 се допират един с друг като и се допират до диаметъра и до дъгата на K. При $n\ge 3$: K_1 и K_n се допират до дъгата и до диаметъра на K; K_i се допира до дъгата и до диаметъра на K, и също се допира до K_{i-1} и до K_{i+1} за $i=2, ..., n-1$.

(i) $n=2$**:**

Възможни са следните две разположения на двата кръга, виж Фиг. 1:

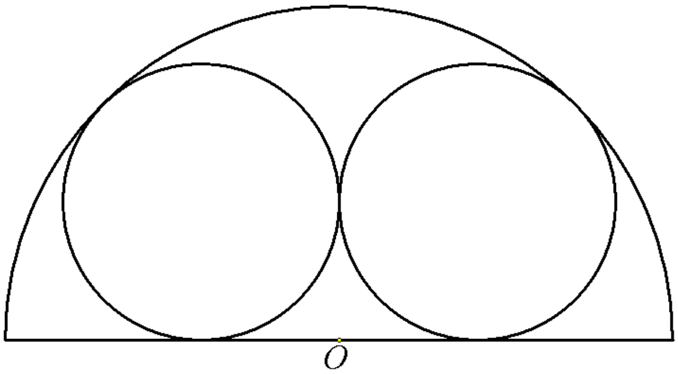


Фиг. 1

В $[1]$ е доказана следната формула

$$R^2(r_1+r_2)^2+4Rr_1r_2(r\ +r_2)+4r_1^2r_2^2-8R^2r_1r_2=0 \qquad (1.1)\ .$$

Там също е доказано, че $\max\{r_1+r_2\}$, $\max\{r_1r_2\}$ и $\max\{r_1^2+r_2^2\}$ се достигат при $r_1=r_2=(\sqrt{2}-1)R$.



Фиг. 2

(ii) $n=3$ (Фиг. 3)

Прилагаме (1.1) за r_1, r_2 и за r_2, r_3. Тогава следва, че r_1, r_3 са корените на уравнението

$$(R+2r_2)^2z^2-2Rr_2(3R-2r_2)z+R^2r_2^2=0\ . \qquad (1.2)$$

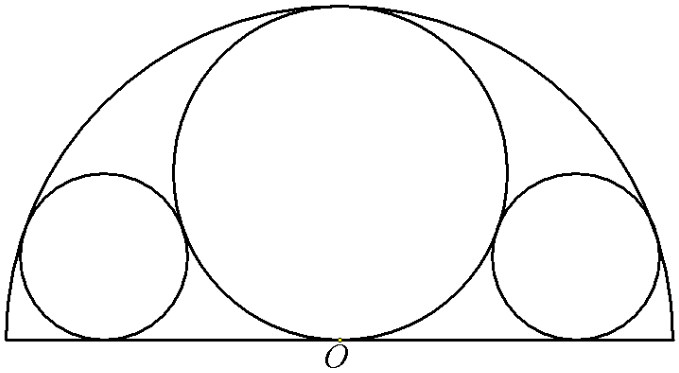
Тогава от формулите на Виет

$$r_1+r_3=\frac{2Rr_2(3R-2r_2)}{(R+2r_2)^2}\quad ,\quad r_1r_3=\frac{R^2r_2{}^2}{(R+2r_2)^2}\ , \qquad (1.3)$$

последователно получаваме

$$\frac{r_1+r_3}{r_1r_3}=\frac{2(3R-2r_2)}{Rr_2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{r_1}-\frac{6}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{4}{R}. \qquad (1.4)$$

В $[1]$ е доказано, че $\max\{r_1r_2r_3\}$ се достига, когато $r_2=\frac{R}{2}$, $r_1=r_3=\frac{R}{4}$.



Фиг. 3

Теорема 1.1

$\max\{r_1+r_2+r_3\}$ и $\max\{r_1^2+r_2^2+r_3^2\}$ се достигат при $r_2=\frac{R}{2}$, $r_1=r_3=\frac{R}{4}$.

Доказателство:

От формули (1.3) получаваме, че

$$r_1+r_2+r_3=\frac{2Rr_2(3R-2r_2)}{(R+2r_2)^2}+r_2.$$

Следователно, $\max\{r_1+r_2+r_3\}$ се достига, точно когато се достига НГС $f_1(x)$, където $f_1(x)=\frac{2x(3-2x)}{(2x+1)^2}+x$, $x\in(0;\frac{1}{2}]$ (явно $x=\frac{r_2}{R}$). Последователно получаваме

$$f_1(x)=\frac{4x^3+7x}{(2x+1)^2}\qquad\Rightarrow\qquad f_1'(x)=\frac{8x^3+12x^2-14x+7}{(2x+1)^3}.$$

Сега, от $x\in(0;\frac{1}{2}]$ следва, че $f_1'(x)>\frac{12x^2-14x+7}{8}>0$.

Следователно, $f_1(x)$ е растяща в интервала $x\in(0;\frac{1}{2}]$, откъдето НГС $f_1(x)$ се достига за $x=\frac{1}{2}$, т.е. $r_2=\frac{R}{2}$ и тогава $r_1=r_3=\frac{R}{4}$.

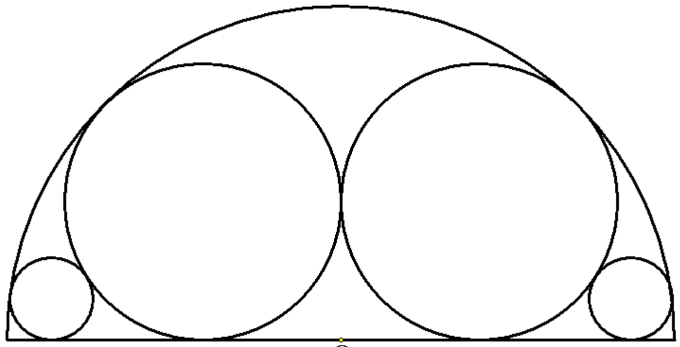
Като използваме (1.3) и $(r_1+r_3)^2-2r_1r_3=r_1^2+r_3^2$, аналогично получаваме: $\max\{r_1^2+r_2^2+r_3^2\}$ се достига, точно когато се достига НГС $f_2(x)$, където

$$f_2(x)=\frac{4x^4-28x^3+17x^2}{(2x+1)^4},\quad x\in(0;\frac{1}{2}],\ x=\frac{r_2}{R}.$$

Тогава $f_2'(x)=\frac{2x(2x+1)(36x^2-76x+17)}{(2x+1)^8}$. Следователно, знакът на $f_2'(x)$ зависи от числата $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{19-\sqrt{55}}{18}$, $x_4=\frac{19+\sqrt{55}}{18}$. Явно, $x_1<x_2<\frac{1}{2}<x_3<x_4$.

Следователно, $f_2'(x)>0$ за $x\in(0;\frac{1}{2}]$, откъдето следва, че НГС $f_2(x)$ се достига за $x=\frac{1}{2}$ т.е. $r_2=\frac{R}{2}$ и тогава $r_1=r_3=\frac{R}{4}$.

(iii) $n=4$ (Фиг. 4)



Фиг. 4

Теорема 1.2

$\max\{r_1r_2r_3r_4\}$ се достига при $r_2 = r_3 = \left(\sqrt{2}-1\right)R$, $r_1 = r_4 = \dfrac{\left(5\sqrt{2}-1\right)R}{49}$.

Доказателство:

Първо ще докажем, че

$$\sqrt{r_1r_2r_3r_4} = \frac{Rr_2r_3}{R+4\sqrt{2}\sqrt{r_2r_3}} \qquad (1.5).$$

От (1.3) следва, че $r_1r_3 = \dfrac{R^2{r_2}^2}{\left(R+2r_2\right)^2}$ и $r_2r_4 = \dfrac{R^2{r_3}^2}{\left(R+2r_3\right)^2}$. Следователно

$$\sqrt{r_1r_2r_3r_4} = \frac{R^2r_2r_3}{\left(R+2r_2\right)\left(R+2r_3\right)} \qquad (1.6).$$

$$\left(R+2r_2\right)\left(R+2r_3\right) = R^2 + 2R\left(r_2+r_3\right) + 4r_2r_3 = R^2 + 2R\frac{2\sqrt{2}R\sqrt{r_2r_3} - 2r_2r_3}{R} + 4r_2r_3 =$$
$$= R^2 + 4\sqrt{2}R\sqrt{r_2r_3}.$$

Заместваме последното в знаменателя на (1.6) и получаваме (1.5) (използвахме, че $r_2 + r_3 = \dfrac{2\sqrt{2}R\sqrt{r_2r_3} - 2r_2r_3}{R}$, което следва от формула (1.1) за r_2 и r_3 и след това решаваме като квадратно уравнение относно $r_2 + r_3$).

Разглеждаме дясната страна на (1.5) като функция на $\sqrt{r_2r_3}$, т.е.

$$\sqrt{r_1r_2r_3r_4} = \frac{Rr_2r_3}{R+4\sqrt{2}\sqrt{r_2r_3}} = \frac{Rx^2}{R+4\sqrt{2}x} = f(x).$$

Както отбелязахме по-горе, $\max\{r_2r_3\} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2R^2$ (когато $r_2 = r_3 = \left(\sqrt{2}-1\right)R$).

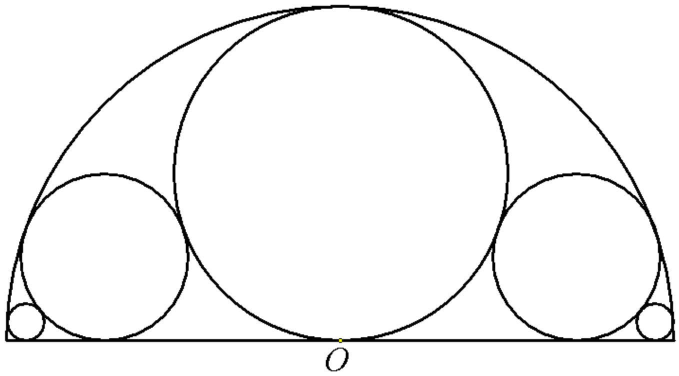
Следователно $x \in (0; \left(\sqrt{2}-1\right)R]$. Тогава, от $f'(x) = \dfrac{2R^2x + 4\sqrt{2}Rx^2}{\left(R+4\sqrt{2}x\right)^2} > 0$ следва,че

НГС $f(x) = f\left(\left(\sqrt{2}-1\right)R\right)$, т.е. твърдението е доказано.

Заб.1.1 Стойностите на r_1 и r_4 могат да се намерят например от (1.3).

Заб.1.2 По подобен начин може да се покаже, че $\max\{r_1+r_2+r_3+r_4\}$ се достига, точно когато се достига НГС $f(x)$, където $f(x) = \dfrac{-56x^4 + 16\sqrt{2}x^3 + 12x^2}{\left(4x^4 - 4x^2 + 4\sqrt{2}x + 1\right)^2}$, $x \in (0; \sqrt{2}-1]$.

(iv) $n = 5$ (Фиг. 5)



Фиг. 5

Теорема 1.3

$\max\{r_1 r_2 r_3 r_4 r_5\}$ се достига при $r_3 = \frac{R}{2}$, $r_2 = r_4 = \frac{R}{4}$, $r_1 = r_5 = \frac{R}{18}$.

Доказателство:

Първо ще докажем, че

$$r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 = \frac{R^4 r_3^5}{(R + 2r_3)^2 (R + 16r_3)^2}. \tag{1.7}$$

Съгласно (1.3)

$$r_1 r_3 = \frac{R^2 r_2{}^2}{(R + 2r_2)^2}, \quad r_2 r_4 = \frac{R^2 r_3{}^2}{(R + 2r_3)^2}, \quad r_3 r_5 = \frac{R^2 r_4{}^2}{(R + 2r_4)^2}.$$

Умножаваме тези три равенства и последователно получаваме:

$$r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 = \frac{R^6}{(R + 2r_3)^2} \left(\frac{r_2 r_4}{(R + 2r_2)(R + 2r_4)} \right)^2. \tag{1.8}$$

Но $(R + 2r_2)(R + 2r_4) = R^2 + 2R(r_2 + r_4) + 4r_2 r_4$.

От $r_2 r_4 = \frac{R^2 r_3{}^2}{(R + 2r_3)^2}$ и $r_2 + r_4 = \frac{2Rr_3(3R - 2r_3)}{(R + 2r_3)^2}$ и от горното равенство, след заместване в дясната страна на (1.8) и преобразуване, получаваме (1.7). Полагаме $x = \frac{r_3}{R}$ и получаваме, че $\max\{r_1 r_2 r_3 r_4 r_5\}$ се достига, точно когато се достига НГС $f(x)$, където $f(x) = \frac{x^5}{(2x + 1)^2 (16x + 1)^2}$, $x \in (0; \frac{1}{2}]$. След пресмятане и опростяване получаваме, че $f'(x) = \frac{x^4 (32x^2 + 54x + 5)}{(32x \ \ + 18x + 1)^3} > 0$, $x \in (0; \frac{1}{2}]$. Тогава явно НГС $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, с което твърдението е доказано.

Заб.1.3 Стойностите на r_1 и r_5 могат да се намерят например от (1.3).

Заб.1.4 Явно r_1 еднозначно определя $r_2, r_3, r_4, \ldots, r_n$.

Използвайки (1.4) ще намерим експлицитна формула за r_i, $i = 2,3,\ldots,n$ в зависимост от r_1. Полагаме $\frac{R}{r_i} = a_i$. Тогава от (1.4) следва, че редицата $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ удовлетворява рекурентната зависимост $a_{k+2} - 6a_{k+1} + a_k = -4$ за $k \geq 1$.

След стандартни пресмятания (за повече информация относно рекурентните редици може да се използва например [4]) получаваме:

$$a_1 = a\ ,\quad a_2 = 3a - 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{a^2 - 2a}\quad ,\quad a_k = 1 + c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k\ ,\quad k \ge 3\ ,\ \text{където}$$

$$c_1 = \frac{\left(3a + 3 - 2\sqrt{2}\sqrt{a^2 - 2a}\right)\lambda_2 + 1 - a}{2\sqrt{5}}\ ,\quad c_2 = \frac{\left(3a - 3 + 2\sqrt{2}\sqrt{a^2 - 2a}\right)\lambda_1 + a - 1}{2\sqrt{5}}\ ,$$

$$\lambda_1 = 3 - \sqrt{5}\ ,\quad \lambda_2 = 3 + \sqrt{5}\quad .$$

Следователно , при фиксирано $r_1 = r$ са в сила формулите:

$$r_2 = \frac{Rr\left(3R - 2r + \sqrt{2}\sqrt{R^2 - 2Rr}\right)}{\left(R + 2r\right)^2}\ ;$$

$$r_i = \frac{R}{a_i}\ \text{за}\ l \ge 3\ (\text{явно}\ \ a = \frac{R}{r_1}).$$

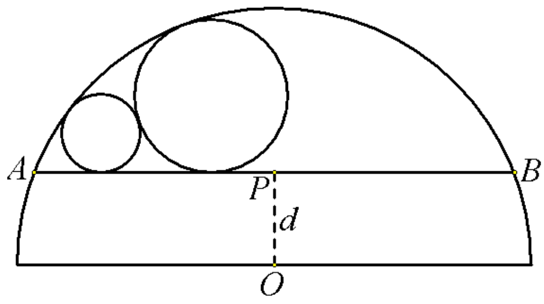
Горните формули са в сила, когато $r_1 \le r_n$. В противен случай се променя стойността на r_2.

2. Кръгове, вписани в даден сегмент.

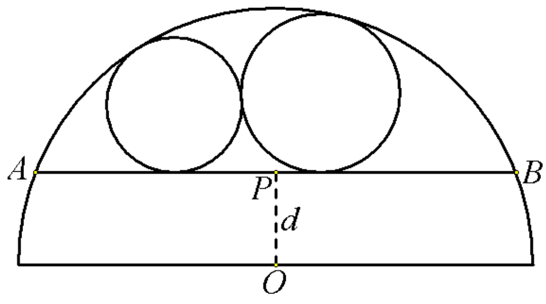
Навсякъде по-долу ще считаме, че са фиксирани кръг $K(O;R)$ и сегмент S, ограничен от хордата AB (P е среда на AB), като разстоянието от O до AB е равно на d. Нека в S са вписани кръговете $K_1(O_1;r_1), K_2(O_2;r_2), \ldots, K_n(O_n;r_n)$ (за по-кратко $K_1, K_2, \ldots, K_n$) по долуописания начин: при $n = 2$: K_1 и K_2 се допират един с друг, като се допират и до AB, и до дъгата на S; при $n \ge 3$: K_1и K_n се допират до дъгата на S и до AB; K_i се допира до дъгата на S и до AB, и също се допира до K_{i-1} и до K_{i+1} за $i = 2, \ldots, n-1$.

$(i)\quad n = 2$

Възможни са следните два случая: Сл.1 (Фиг.6) и Сл.2 (Фиг.7)

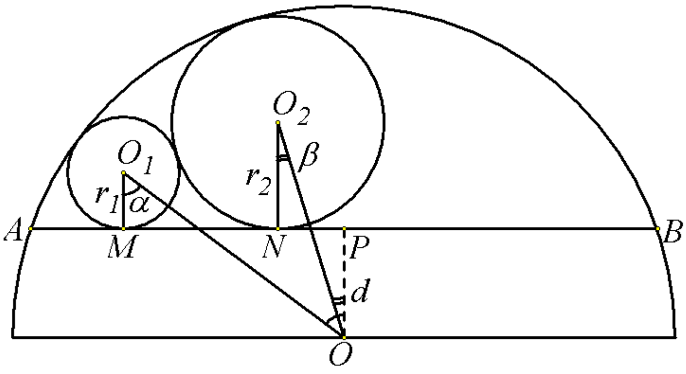


Фиг. 6



Фиг. 7

Нашата първа цел е да намерим връзка между R, d, r_1 и r_2 (формула (2.2) по-долу). Разглеждаме Сл.1.



Фиг. 8

Означаваме $\alpha = \angle O_1OP = \angle OO_1M$, $\beta = \angle O_2OP = \angle OO_2N$. От

$$2\sqrt{r_1r_2} = MN = MC + CP + PD + DN$$

и от $OO_1 = R - r_1$, $OO_2 = R - r_2$ последователно получаваме:

$$R - r_1 = \frac{r_1}{\cos\alpha} + \frac{d}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{r_1 + d}{R - r_1} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - 2r_1(d+R) - d^2}}{R - r_1}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - 2r_1(d+R) - d^2}}{r_1 + d} .$$

Аналогично $tg\beta = \dfrac{\sqrt{R^2 - 2r_2(d+R) - d^2}}{r_2 + d}$. Тогава

$$2\sqrt{r_1r_2} = (r_1 + d)tg\alpha + (r_2 + d)tg\beta \qquad (2.1).$$

Следователно, $\sqrt{R^2 - 2r_1(d+R) - d^2} + \sqrt{R^2 - 2r_2(d+R) - d^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$, откъдето получаваме

$$(d+R)^2(r_1 + r_2)^2 + 4(d+R)r_1r_2(r_1 + r_2) - 8(R^2 + dR)r_1r_2 + 4r_1^2r_2^2 = 0 \qquad (2.2).$$

Заб. 2.1 В Сл.2 от (2.1) следва: $2\sqrt{r_1r_2} = (r_1 + d)tg\alpha - (r_2 + d)tg\beta$, но след преобразуване отново получаваме (2.2).

Заб. 2.2 Явно е, че от (2.2) при $d = 0$ получаваме (1.1).

От (2.2) следва

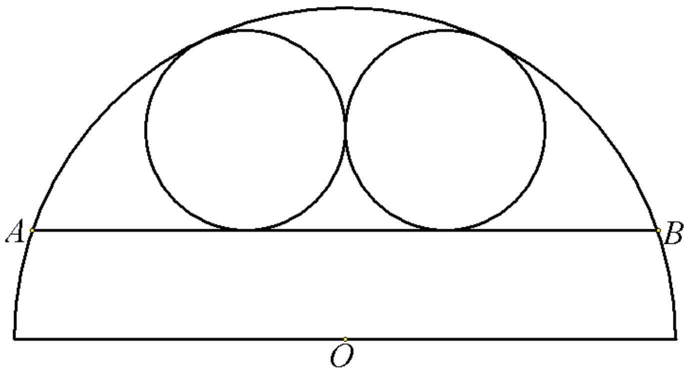
$$r_1 + r_2 = \frac{2}{d+R}(t\sqrt{2R(d+R)} - t^2) , \text{ където } t = \sqrt{r_1r_2} \qquad (2.3) .$$

От (2.3) и от очевидното неравенство $r_1 + r_2 \geq 2\sqrt{r_1r_2} = 2t$ следва, че

$2t \leq \dfrac{2}{d+R}(t\sqrt{2R(d+R)} - t^2)$, откъдето получаваме: $t = \sqrt{r_1r_2} \leq \sqrt{2R(d+R)} - d - R$, като равенство се достига за $r_1 = r_2 = r_0 = \sqrt{2R(d+R)} - d - R$. Т.е., доказахме следната

Теорема 2.1.

$\max\{r_1r_2\} = r_0^2$, като равенство се достига при $r_1 = r_2 = r_0 = \sqrt{2R(d+R)} - d - R$.



Фиг. 9

Теорема 2.2.

$\max\{r_1+r_2\}$ и $\max\{r_1^2+r_2^2\}$ се достигат, когато $r_1=r_2=r_0=\sqrt{2R(d+R)}-d-R$.

Доказателство:

От (2.3) и от **Теорема 2.1.** следва, че

$$\max\{r_1+r_2\}=\text{НГС } f(t)=\frac{2}{d+R}(t\sqrt{2R(d+R)}-t^2)\text{ , за } t\in(0;r_0].$$

Последователно получаваме: $f'(t)=\dfrac{2}{R+d}(\sqrt{2R(R+d)}-2t)\geq f'(r_0)$,

$$f'(r_0)=\frac{2}{d+R}(2R+2d-\sqrt{2R(d+R)})>\frac{2}{R+d}[2R+2d-\sqrt{2}(R+d)]=2(2-\sqrt{2})>0\,.$$

Т.е., $f(t)$ е растяща в интервала $(0;r_0]$. Следователно първата част от теоремата е доказана.

От $r_1^2+r_2^2=(r_1+r_2)^2-2r_1r_2$ и от (2.3) следва, че $r_1^2+r_2^2=g(t)$ където

$$g(t)=\frac{2}{(d+R)^2}[(3R^2+2dR-d^2)t^2-4\sqrt{2(R^2+dR)}t^3+2t^4]\text{ , } t\in(0;r_0].$$

Последователно получаваме:

$$g'(t)=\frac{2}{(d+R)^2}[2(3R^2+2dR-d^2)t-12\sqrt{2(R^2+dR)}t^2+8t^3]\quad\Rightarrow$$

$$g'(t)=0\qquad\Leftrightarrow\qquad t=t_1=0\,,\quad t=t_{2,3}=\frac{3\sqrt{2(R^2+dR)}\pm\sqrt{6R^2+10dR+4d^2}}{4}\,.$$

Лесно се проверява, че $t_1<r_0<t_2<t_3$. Следователно $g'(t)>0$ за $t\in(0;r_0]$. Т.е. $g(t)$ е растяща в интервала $(0;r_0]$, откъдето следва верността и на втората част от теоремата.

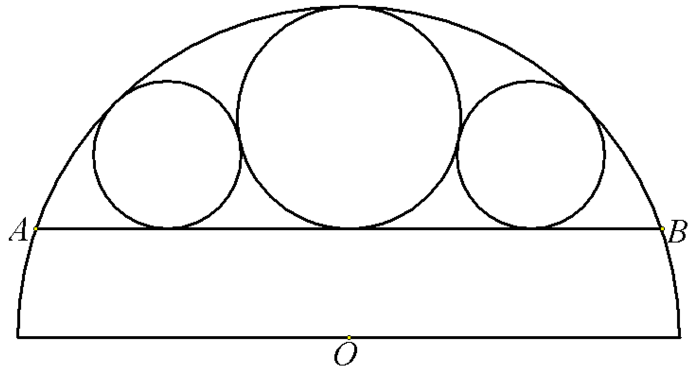
(ii) $n=3$ (Фиг. 10)

Прилагаме формула (2.2) за r_1, r_2 и за r_2, r_3. Следователно r_1 и r_3 са корените на уравнението

$$(R+d+2r_2)^2z^2-2(R+d)r_2(3R-d-2r_2)z+(R+d)^2r_2^2=0\,.$$

От формулите на Виет получаваме:

$$r_1+r_3=\frac{2(R+d)r_2(3R-d-2r_2)}{(R+d+2r_2)^2},\quad r_1r_3=\frac{(R+d)^2r_2{}^2}{(R+d+2r_2)^2}\,. \tag{2.4}$$



Фиг. 10

Теорема 2.3

$\max\{r_1 r_2 r_3\}$ и $\max\{r_1 + r_2 + r_3\}$ се достигат при $r_2 = \dfrac{R-d}{2}$, $r_1 = r_3 = \dfrac{R^2 - d^2}{4R}$.

Доказателство:

От (2.4) следва, че

$$r_1 r_2 r_3 = \frac{(R+d)^2 r_2^{\,3}}{\left(R+d+2r_2\right)^2} = f(r_2)\ ,\ \ r_2 \in (0; \frac{R-d}{2}]\ .$$

От $f'(r_2) = \dfrac{(R+d)^2 r_2^2 (3R + 3d + 2r_2)}{(R+d+2r_2)^3} > 0$ следва верността на първата част от теоремата.

От (2.4) следва, че

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{2(R+d)r_2\left(3R - d - 2r_2\right)}{\left(R+d+2r_2\right)^2} + r_2 = \frac{4r_2^3 + (R+d)(7R-d)r_2}{(R+d+2r_2)^2} = g(r_2)\ ,\ \ r_2 \in (0; \frac{R-d}{2}]\ .$$

За да докажем и втората част от теоремата е достатъчно да докажем, че $g'(r_2) > 0$. Това става по следния начин:

$$g'(r_2) = \frac{8r_2^3 + 12(R+d)r_2^{\,2} - 2(R+d)(7R-d)r_2 + (R+d)^2(7R-d)}{(R+d+2r_2)^3} >$$

$$\frac{12(R+d)r_2^{\,2} - 2(R+d)(7R-d)r_2 + (R+d)^2(7R-d)}{(R+d+2r_2)^3} =$$

$$\frac{(R+d)[12r_2^{\,2} - 2(7R-d)r_2 + (R+d)(7R-d)]}{(R+d+2r_2)^3} > 0$$

(Квадратният тричлен в числителя има отрицателна дискриминанта: $-(5R+13d)(7R-d) < 0$).

Заб.2.3 Използвайки същия похват както в **Гл.1**, могат да се докажат аналози на **T1.2** и **T1.3**.

Заб.2.4 От формули (2.4) получаваме, че

$$\frac{r_1 + r_3}{r_1 r_3} = \frac{2(3R - d - 2r_2)}{(R+d)r_2} = \frac{2(3R-d)}{R+d}\frac{1}{r_2} - \frac{4}{R+d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r_1} - \frac{2(3R-d)}{R+d}\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = -\frac{4}{R+d}\,.$$

Последната формула е аналог на (1.4). Чрез нея, при дадено $r_1 = r$, може да се намери експлицитна формула за r_i , $i = 2,3,\ldots,n$, по същия начин, както е показано в **Заб.1.4** .

ЛИТЕРАТУРА

Mitev, T. P. (2000) Ekstremalni zadachi za kragove, vpisani v polukrag. sp. Matematika i informatika, br. 4, str. 49-55 (***Оригинално заглавие:*** *Митев, Т. П. (2000). ,,Екстремални задачи за кръгове, вписани в полукръг", сп. ,,Математика и информатика" бр.4, стр. 49-55).*

Shklyarskij, D. O., Chentsov, N. N, & Yaglom, I. M. (1970) *Geometricheskie neravenstva i zadachi na maksimum i minimum*. Nauka, Moskva (***Оригинално заглавие:*** *Шклярский, Д. О., Ченцов, Н. Н. , Яглом, И. М. (1970). ,,Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум" Наука, Москва.)*

Shklyarskij, D. O., Chentsov, N. N, & Yaglom, I. M. (1974) *Geometricheskie otsenki i zadachi iz komblnatornoj geometrii*. Nauka, Moskva (***Оригинално заглавие:*** *Шклярский, Д. О., Ченцов, Н. Н. , Яглом, И. М. (1974) ,,Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии". Наука, Москва.)*

Markushevich, A. I. (1975) *Vozvratnie posledovatelnosti*. Izdanie 2, Nauka, Moskva (***Оригинално заглавие:*** *Маркушевич, А. И. (1975). ,,Возвратные последовательности" Издание 2, Наука, Москва.)*