

FRI-2G.305-1-ERI-03

---

## PROBLEM SOLVING MODEL IN MATHEMATICS<sup>2</sup>

---

**Assist. Prof. Desislava Georgieva, PhD**

Department of Algebra and Geometry

Faculty of Mathematics and Informatics

St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Bulgaria

Phone: +359 887 244 498

E-mail: [d.georgieva@ts.uni-vt.bg](mailto:d.georgieva@ts.uni-vt.bg)

**Assoc. Prof. Emiliya Velikova, PhD**

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

“Angel Kanchev” Univesity of Ruse

Phone: +359 885 635 874

E-mail: [evelikova@uni-ruse.bg](mailto:evelikova@uni-ruse.bg)

**Pr. Assist. Prof. Ralitsa Vasileva-Ivanova, PhD**

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

“Angel Kanchev” Univesity of Ruse

Phone: +359 884109 719

E-mail: [rivanova@uni-ruse.bg](mailto:rivanova@uni-ruse.bg)

***Abstract:** This paper is a theoretical review on the notion of problem and the main groups of mathematical problems' functions. Classifications of learning tasks and mathematical problems are outlined. An important condition for forming and developing problem solving skills is to be familiar with the problem solving activity, which requires three types of mental processes. This activity has two components: algorithmic and heuristic. The Polya's problem solving model has been extended and optimized. The theoretical summaries are made.*

***Keywords:** mathematical problem, problem solving, problem solving activity, problem solving model*

### ВЪВЕДЕНИЕ

Ежедневната дейност на човек е неразривно свързана с търсенето на решения на разнородни житейски проблеми, като това естествено намира отражение в процеса на обучение. Учебният предмет *математика* в най-голяма степен включва дейността решаване на задачи за усвояване на знания и формиране на умения у обучаваните. Задачите са основното и най-резултатното средство за постигане, както на целите на обучението по математика, така и на общообразователните цели на обучението и възпитанието (Ганчев и др., 1997).

### ИЗЛОЖЕНИЕ

#### Понятието задача

Институтът за български език дефинира думата *задача*:

- нещо зададено, поставено, което трябва да се извърши, да се изпълни или постигне;
- работа, дело;
- цел, към която някой се стреми, която иска да постигне;

---

<sup>2</sup> Presented a plenary report of October 26, 2018 with the original title: PROBLEM SOLVING MODEL IN MATHEMATICS

- упражнение на учебен предмет, чрез което се подпомага усвояването на преподавания материал;
- упражнение по математика, физика и др., което се разрешава чрез разсъждения и изчисления.

Д. Френкев (2004) обособява тълкуванията на понятието задача в две групи:

- резултатите от изследванията на произхода, същността, структурата, функциите, разновидностите на задачите са валидни за всички науки и могат да се използват във всяка дисциплина;
- задачата се изследва в тясна научна област, което води до задълбоченост и конкретност на проучването.

В психологически аспект задачата е цел на дейността при определени условия, която изисква адекватни средства за постигането ѝ (Десев, 1999).

Различните учени имат различен подход към въпроса за отношението между субекта и задачата. Голяма част от авторите включват субекта в самото понятие задача (Г. Бал, А. Леонтиев, А. Пономарев, К. Славска и др.) и разглеждат проблемната ситуация, в която действа субектът. Според Л. Фридман (1983) по този начин се изучават не самите задачи, а процесът на тяхното решаване. Той анализира задачата от гледната точка на другата група автори (А. Брушлински, А. Матюшкин), които разглеждат задачата като самостоятелна система, която не зависи от действията на субекта. Първоизточник на задачата е проблемната ситуация, която възниква, когато субектът среща преграда (затруднение) в своята дейност, насочена към даден обект. Преградата може да бъде от различен характер: недостатъчност или несъответствие на знанията, средствата или способите за нейното преодоляване и е необходимо извършване на неизвестно за субекта действие за достигане до целта. Авторите Л. Фридман и Е. Турецкий (1989) предлагат следното определение на понятието задача: изискване или въпрос, на който трябва да се намери отговор, опирайки се и отчитайки указаните условия. Те анализират параметрите на математическите задачи от гледна точка на техния генезис (практически и математически), връзка с теорията (стандартни, нестандартни), естеството на търсенето (за намиране на неизвестното, за преобразуване или построяване за доказване) с цел намиране на общи подходи за решаването им (Фридман, Турецкий, 1989; Фридман, 1977).

В книгата *За математическите задачи* И. Ганчев (1971) формулира понятието математическа задача, като използва теорията на множествата: Всяка математическа задача е последователност от мисли, чрез която се задава по някакъв начин подмножество  $R$  на дадено множество  $M$  от математически обекти или релации и се изисква:

- да се зададе  $R$  конструктивно, ако е крайно;
- да се установи, че  $R$  е подмножество на вече зададено чрез определение подмножество на  $M$ ;
- да се покаже, че обектите на  $R$  може да се получат, чрез определени правила, характеризиращи някакви чертожни инструменти;
- да се покаже, че  $R$  съвпада с някое множество  $R'$ , което се приема като известно.
- Множеството  $M$  се нарича област на решение на задачата.

Подмножеството  $R$  на множеството  $M$  той нарича система решения (отговори) на задачата. Авторът разделя текста на задачата на две части: условие и заключение. Също така дефинира решаване на задача и решена задача (Ганчев, 1971, Ганчев и др., 2002).

### Класификации на задачите

Най-общо задачите се класифицират в зависимост от техния генезис в две групи: задачи, свързани с дейността на човек и учебни задачи. Обобщаването на научните трудове на Л. Фридман, Н. Турецки, В. Крупич, Н. Метелски и И. Ганчев води до класификации на *учебните задачи* по следните признаци:

- преобладаващия тип мислене: *алгоритмични, полуалгоритмични* (полуевристични), *евристични*;

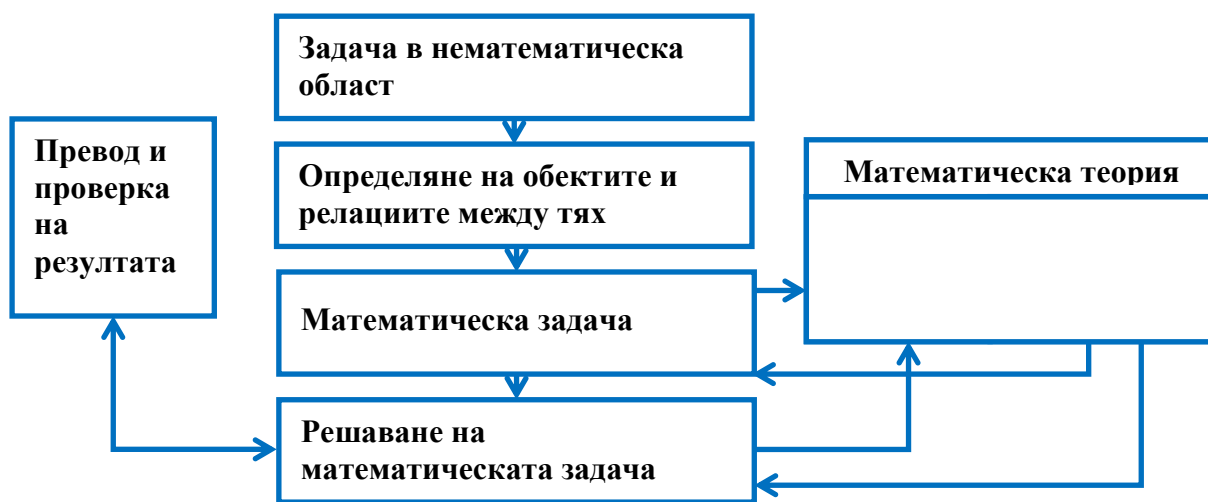
- дидактическата цел: *познавателни* (за нови знания), *тренировъчни* (за изграждане на трайни умения и навици), *развиващи* (изискват творческо мислене);
- по отношение на използваната теория: *стандартни*, *нестандартни*;

**Математическите задачи** се класифицират по следните признаци:

- вид на търсеното:
  - задачи за намиране на търсеното (*за изчисление*);
  - задачи за доказване или обяснение;
  - задачи за преобразуване;
  - задачи за построение;
- тип на участващите обекти:
  - *практически* (житейски, сюжетни и др.);
  - *чисто математически* (участват само математически обекти – числа, функции, геометрични фигури и др.);
- брой на участващите неизвестни компоненти:
  - *обучаващи* – с един неизвестен компонент, съставлящи основното съдържание на учебниците по математика;
  - *творчески* – с два неизвестни компонента, най-често присъстващи на математическите олимпиади;
  - *проблемни* – с повече неизвестни компонента, рядко се срещат в обучението по математика, имат по-скоро производствен и битов характер

### Функции на задачите в обучението по математика

А. Столяр (1976) изобразява схематично връзката между *математическата теория* и *задачите* (Фиг. 1), като задачите са едновременно мотив за последващо развитие на теорията (въвеждане на нови понятия, откриване и доказване на нови свойства на изучаваните обекти) и показател за възможността за нейното ефективно приложение.



Фиг. 1. Връзка между математическата теория и задачите

Решаването на математически задачи притежава четири основни групи функции, които кореспондират с функциите на обучението (Ганчев и др., 2002).

*Обучаващи функции:*

- задълбочено и съзнателно изучаване на математическата теория;
- формиране и усъвършенстване на математически умения и навици (Ганчев и др., 1997);
- посочване на конкретни приложения на усвоена система от знания (Славов, 1978);

*Развиващи функции* (формиране на математически стил на мислене):

- умение да се мисли логически, абстрактно и дедуктивно;
- умение да се използват правилата за извод за построяване на правилни умозаклучения;
- умение да се използват специфичните математически методи за изследване;
- умение да се мисли самостоятелно;

*Възпитателни функции:*

- формиране на редица качества на личността: самостоятелност, упоритост, съсредоточеност, организираност, творческо въображение;
- мотивиране на необходимостта от нови знания;

*Контролни функции:*

- контролиране и самоконтролиране на резултатите от обучението;
- установяване на нивото на обученост и обучаемост (готовност на учениците за усвояване на ново знание или умение) (Славов, 1978);
- преценяване равнището на развитие на качествата на математическото мислене.

### Дейността решаване на задача

Важно условие за формиране и развиване на *умението да се решават задачи* е познаване на дейността *решаване на задача*.

В психологически аспект, понятието *решаване на математическа задача* се определя като такава целенасочена дейност която включва серия от операции, съдържащи важни когнитивни компоненти, при която придвижването от дадено състояние към целта може да се изрази чрез математически процедури.

*Решаването на математическа задача* се разглежда в научната литература като процес с два принципно различни компонента: алгоритмичен и евристичен. Докато първият се осъществява на база известен алгоритъм (Вишин, 1965), то вторият е в съответствие с приета стратегия за търсене на решение, която може да не доведе до гарантиран успех. Евристиката е едно от най-важните направления в изучаване на структурата на мисловната дейност (Желев, 2012; Тонов, 2012).

Л. Фридман и Е. Турецкий (1989) формулират следното определение на изследваното понятие: *Да се реши математическа задача означава да се намери такава последователност от общи положения в математиката (определения, аксиоми, теореми, правила, закони, формули), прилагането на които към условието на задачата или към междинните резултати от решението води до това, което се търси в задачата.*

При *решаването на всяка задача* се извършват *три вида умствена дейност* (Славов, 1978):

- *ориентировъчна* – анализиране и осмисляне на дадената в текста на задачата информация, изграждане на изходна идея и на план за решаване на задачата;
- *изпълнителска* – преработване на получената информация (при ориентировъчната дейност) в съответствие с поставената цел;
- *контролна* – съпоставяне на получаваните резултати с целта, с изходната идея, с плана за решаване на задачата и с известни преди това образци, като се извършват необходимите корекции.

*Моделът за решаване на задача*, описан от известния унгарски математик Д. Пойа в книгата *Как да се решава задача?*, включва следните етапи (Пойа, 1972):

- *запознаване със задачата* – оглеждане на задачата като цяло, временно изоставяне на подробностите;
- *разбиране на задачата* – разделяне на задача на главни части: предпоставката и заключението са – главните части на една задача за доказване; неизвестното, данните и условието са главните части на една задача за намиране;
- *търсене на плодотворна идея* – разглеждане на задачата от различни гледни точки, комбиниране на подробностите по различни начини; отсяване на тези знания от миналия опит, които са плодотворни и са свързани с решаването на задачата;

- *провеждане на плана* – извършване на операциите, проверяване на правилността им чрез формално-логически разсъждения;
- *оглеждане на решението* – усъвършенстване на решението.

Във връзка с третия етап Д. Пойа (1972) съветва: *Разгледайте задачата от различни страни. Подчертайте различните части, изучете различните подробности, изучете ги нееднократно, но по различни начини, комбинирайте подробностите по различни начини, подходете към тях от различни страни. Опитайте се да уловите някакъв нов смисъл във всяка от подробностите, потърсете някоя нова интерпретация на цялото. Потърсете допирни точки с ваши по-рано придобити знания. Опитайте се да си припомните, какво ви е помагало при подобни ситуации в миналото. Опитайте се да видите нещо познато в онова, което изучавате, опитайте се да намерите нещо полезно в онова, което се окаже познато.*

За последния етап той предлага (Пойа, 1972): *Разгледайте внимателно метода, който ви е довел до решението, и се опитайте да видите неговите възлови пунктове и да го използвате за други задачи. Разгледайте внимателно резултата и се опитайте да го използвате при други задачи.* И. Ганчев и др. (1996) добавят: *задачата трябва да се осъзнае като представител на определен клас задачи,..., след решаването на няколко подобни задачи се правят изводи за решаването на задачи от съответния клас.*

Етапите от този модел съответстват на етапите от психологическата концепция за формиране на умения, защото всеки стадий от решаването на дадена задача е свързан с формирането на определени умения у решаващия.

Моделът на Л. Фридман и Е. Турецкий (1989) за решаване на математическа задача надгражда модела на Д. Пойа:

1. *анализ на задачата* – разделяне на условието на *дадено* и *търсено* и отделяне на тези данни, които ще подпомогнат откриването на търсеното;
2. *схематичен запис на задача*, която не е записана с математическа символика – фиксиране на проведения анализ;
3. *търсене на начин, метод за решаване на задачата* – разпознаване вида на задачата, свеждане към предходна решена задача, разделяне на подзадачи;
4. *осъществяване на решението на задачата* по намерения способ (използване на всички данни от *даденото*);
5. *проверка на решението на задачата* – сверяване дали намереното удовлетворява всички изисквания на задачата;
6. *изследване на задачата* – определяне при какви условия задачата има решение и колко решения има при тези условия;
7. *формулиране на отговора на задачата* – открояване на резултата;
8. *анализ на решението на задачата* – съпоставяне с решенията на предходните задачи, подчертаване на особеностите, търсене на по-рационални способи на решение, обобщаване на дадената задача;

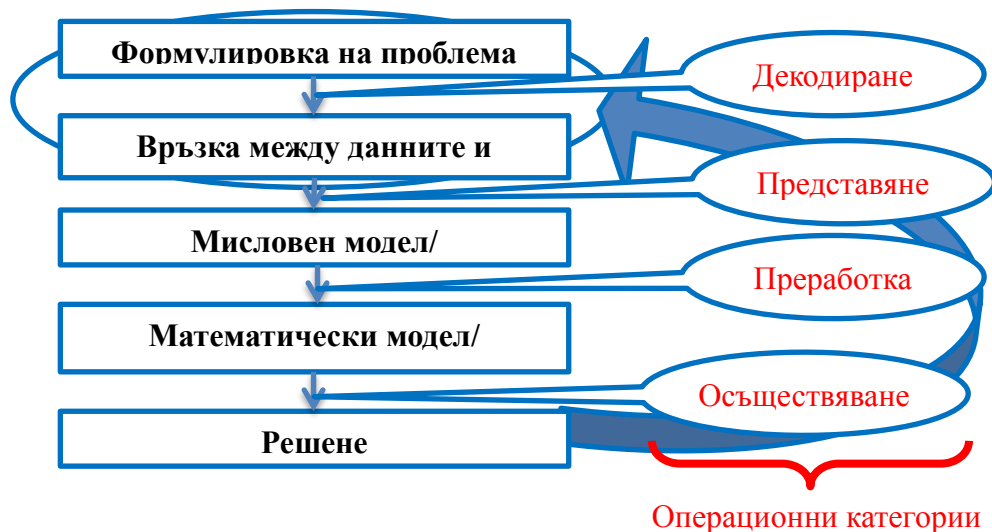
В. Милушев и Д. Френкев (2005) отбелязват, че знанията и умения *могат да се овладеят и затвърдят на по-високо равнище, ако се провокира познавателна активност у учащите, например, с помощта на практическа задача.* Но освен за създаване на проблемност и интерес у учащите, *сюжетът ѝ трябва да оказва и определено възпитателно въздействие.* Авторите създават модел за решаване на практически задачи.

Ф. Сингър и К. Воица (Singer, Voica, 2013) изследват взаимодействието между математическия и когнитивния компонент по време на решаването на математическа задача. Считат, че *когато процесът на решаване е успешен, решаващия последователно променя своите познавателни позиции, свързани с проблема чрез еквивалентни и обратими трансформации, които позволяват различни нива на описание на първоначалната формулировка. В рамките на тези трансформации, преминаването между последователните фази на процеса на решаване определя четири операционни категории:*

- *декодиране* – преобразуване на текста в по-ясни отношения между данните и търсеното;
- *представяне* – трансформиране на проблема чрез породения мисловен модел;

- *преработка* – идентифициране на съответния математически модел на базата на мисловните конфигурации, предложени от проблема и математическите компетентности на обучавания;
- *осъществяване* – прилагане на определени математически техники за конкретната проблемна ситуация с цел изготвяне на стандартизирано решение.

Тази рамка (Фиг. 2) предлага идеи за по-ефективно обучение и може да се използва за анализиране на проблеми и съставяне на задачи.



Фиг. 2. Концептуална рамка на процеса „решаване на задача“

Решаването на задача може да се разглежда като комбиниране на условия, които произтичат от структурните елементи на задачата, свързване на тези условия в дедуктивна система и получаване на търсения резултат, т.е. конструиране на решение (Grozdev, 2007).

## ИЗВОДИ

Понятието *математическа задача* се разглежда като задаване на подмножество  $R$  на дадено множество  $M$  от математически обекти и дефинираните изисквания за определяне на  $R$ . Математическите задачи се класифицират според вида на търсеното, тип на участващите обекти, броя на участващите неизвестни компоненти. Те притежават *обучаващи, възпитаващи, развиващи и контролни функции*.

Моделът на Л. Фридман и Е. Турецкий, осигурява подходящи условия за провеждане на дейността решаване на задача. Теоретичната рамка на Ф. Сингър и К. Воица предлага средства за по-ефективно обучение и може да се използва за анализиране и съставяне на задачи.

## REFERENCES

Desev, L. (1999) *Rechnik po psikhologiya*, Parvo izdanie. Sofia: Bulgarika. (Оригинално заглавие: Десев, Л., 1999. Речник по психология, Първо издание (Над 2000 термина). София: Булгарика).

Frenkev, D. (2004). *Za tekstovite zadachi v nachalnoto obuchenie po matematika*. Plovdiv (Оригинално заглавие: Френкев, Д., 2004. За текстовите задачи в началното обучение по математика. Пловдив).

Fridman, L. (1977). *Logiko-psikhologicheskiy analiz shkolnix uchebnix zadach*. Moskva: Pedagogika (Оригинално заглавие: Фридман, Л., 1977. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. Москва: Педагогика).

Fridman, L. (1983). *Psikhologo-pedagogicheskiye osnovy obucheniya matematike v shkole. Uchitelyu matematiki o pedagogicheskoy psikhologii*. Moskva: Prosveshcheniye (Оригинално заглавие: Фридман, Л., 1983. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. Учителю математики о педагогической психологии. Москва: Просвещение).

Fridman, L., & Turetskiy, E. (1989). *Kak nauchitsya reshat zadachi*. Moskva: Prosveshcheniy. (Оригинално заглавие: Фридман, Л., Турецкий, Е., 1989. Как научиться решать задачи. Москва: Просвещение).

Ganchev, I. (1971). *Za matematicheskite zadachi*. Sofia: Narodna prosveta. (Оригинално заглавие: Ганчев, И., 1971. За математическите задачи. София: Народна просвета).

Ganchev, I., Kolyagin, Y., Kuchinov, I., Portev, L., & Sidorov, Y. (1996). *Metodika na obuchenieto po matematika ot 8 do 10 klas*. Sofia: Modul (Оригинално заглавие: Ганчев, И., Колягин, Ю., Кучинов, Й., Портев, Л., Сидоров, Ю., 1996. Методика на обучението по математика от 8 до 10 клас, част 1. София: Модул).

Ganchev, I., Portev, L., Baev, B., & Todorova, P. (1997) *Metodika na obuchenieto po matematika 5-7 klas*. Plovdiv: Makros 2000 (Оригинално заглавие: Ганчев, И., Портев, Л., Баев, Б., Тодорова, П., 1997. Методика на обучението по математика 5-7 клас. Пловдив: Макрос 2000)

Ganchev, I., Ninova, Y., & Nikova, V. (2002). *Metodika na obuchenieto po matematika (obshta chast)*. Blagoevgrad: Universitetsko izdatelstvo „Neofit Rilski“ (Оригинално заглавие: Ганчев, И., Нинова, Ю., Никова, В., 2002. Методика на обучението по математика (обща част). Благоевград: Университетско издателство „Неофит Рилски“).

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics the Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: RUTA.

Milushev V., & Frenkev D. (2005) *Podkhod za formirane i razvivane motivatsionnata sfera na uchenika v obuchenieto po matematika. Matematika i matematicheskoto obrazovanie, zasedanie na 34 proletna konferentsiya na Sayuza na matematitsite v Bulgaria, 6th – 9th april, Borovets, Bulgaria, 352-357*. (Оригинално заглавие: Милушев В., Френкев Д. 2005. Подход за формиране и развиване мотивационната сфера на ученика в обучението по математика. Математика и математическо образование, заседание на 34 пролетна конференция на Съюза на математиците в България, Боровец, 6 – 9 април, с. 352-357)

Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Science Library.

Singer, F., & Voica, C. (2013). *A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. Educational Studies in Mathematics, 83*, Dordrecht: Springer Science+Business Media, 9-26.

Slavov, K. (1978). *Podgotovka na uchenitsite za samostoyatelna rabota po matematika*. Sofia: Narodna prosveta (Оригинално заглавие: Славов, К., 1978. Подготовка на учениците за самостоятелна работа по математика. София: Народна просвета).

Stolyar, A. (1976). *Pedagogika na matematikata*. Sofiya: Narodna prosveta (Оригинално заглавие: Столяр, А., 1976. Педагогика на математиката. София: Народна просвета).

Tonov, I. (2012). *Evristikata – nauka, izkustvo, zanayat*. Sofia: Sofiski universitet „Sv. Kliment Ohridski“ (Оригинално заглавие: Тонов, И., 2012. Евристиката – наука, изкуство, занаят. Монографичен труд. София: Софийски университет „Св. Климент Охридски“).

Vishin, Y. (1965). *Metodika za reshavane na matematicheski zadachi*. Sofiya: Narodna prosveta (Оригинално заглавие: Вишин, Я., 1965. Методика за решаване на математически задачи. София: Народна просвета).

Zhelev, Zh. (2012). *Kompyutarnite evristiki i vazmozhnostite im za izpolzване v olimpiadnata matematika. Matematika i informatika, 4, 338-346* (Оригинално заглавие: Желев, Ж., 2012. Компютърните евристики и възможностите им за използване в олимпиадната математика. Математика и информатика, 4, с. 338-346).