FRI-2G.305-1-ERI-06

ИЗПОЛЗВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ СОФТУЕР GEOGEBRA ЗА РЕШАВАНЕ НА СТЕРЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА[5]

Assoc. Prof. Ivanka Mincheva, PhD
Faculty of Mathematics and Informatics
Department of Algebra and Geometry,
St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Bulgaria
Tel.: 0878264082
E-mail: v.mincheva@yahoo.com

Zhorzheta Angelova, PhD student,
Faculty of Mathematics and Informatics,
Department of Algebra and Geometry,
St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Bulgaria
Tel.: 0899467971
E-mail: jorjeta87@abv.bg

Abstract: *The paper discusses some didactic ideas about solving mathematical problems on topic "Stereometry". A concrete problem on the figure pyramid from the school course of geometry is chosen. Its solution is given and analised. For better understanding and visualising the mathematical software GeoGebra is used. The problem is presented as it might be solved and assimilated in teaching secondary school mathematics. Considering the educational purposes we propose applying mathematical software for introduction and assimilation stereometric knowledge and problem solving in order to draw students' attention and keep them interested and impressed.*

Keywords: *GeoGebra, mathematical software, stereometry, spatial figures, mathematical problem*

ВЪВЕДЕНИЕ

Решаването на стереометрични задачи е важна част от дейността решаване на задачи в обучението по математика. В основата на тази дейност са разбирането и усвояването на стереометрични знания. Основните групи задачи, които се разглеждат в училищния курс по математика, са свързани с основните стереометрични фигури – многостени и ротационни тела. Стереометричните фигури и задачите върху тях могат нагледно да се въвеждат, разбират и усвояват чрез използване на динамичния софтуер GeoGebra.

ИЗЛОЖЕНИЕ

В доклада се анализира решението на избрана задача от пирамида в училищния курс по стереометрия. Методическите бележки по задачата и процеса на нейното решаване са основани на **четирите етапа на решаване на дадена задача, предложени от Дйорд Пойа** (Polya, D., 1972):

- Разбиране на задачата
- Изграждане на идея и съставяне план на решението
- Реализиране на плана и решаване на задачата
- Допълнителна работа по задачата след решението ѝ (поглед назад). (Пойа, 1972)

Чрез използването на математически софтуер GeoGebra се визуализира геометричната фигура, извършват се пресмятания, вмъкват се анимации и др. (Дошкова, 2010). В доклада GeoGebra е използвана за чертане на пирамида, за поетапно построяване на всеки елемент от нея и след като фигурата е построена се показва как може да се визуализира отново

[5] Presented a plenary report of October 26, 2018 with the original title: USING MATHEMATICAL SOFTWARE GEOGEBRA FOR SOLVING SPATIAL PROBLEMS IN TEACHING MATHEMATICS

построението в хронологичен ред. Чрез GeoGebra се оцветява фигурата и отделните ѝ елементи, а използването на анимация онагледява основните елементи на фигурата – основи, основни ръбове, околни стени, околни ръбове, височина и др. Така се достига до по-достъпно представяне, по-ясно изложение и разбиране на стереметричните знания, както и за по-бързо и лесно откриване на решението на стереометрични задачи. За доклада са използвани три прозореца на GeoGebra: алгебричен прозорец, чертожна повърхност и $3D$ прозорец.

Задача. *Дадена е правилна триъгълна пирамида с дадени основен ръб* $a = 6$ *и околен ръб* $l = 4$*. Да се намерят обемът на пирамидата и тангенсът на ъгъла между равнините на околната стена и основата.*

Методически бележки по задачата

1. РАЗБИРАНЕ НА ЗАДАЧАТА – основните дейности са свързани с:

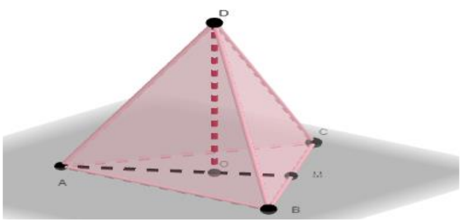
- разбиране на понятията пирамида, правилна пирамида, правилна триъгълна пирамида, основни елементи на пирамида – основа, околни стени, връх, основни ръбове, околни ръбове, височина, апотема, ъгъл между околна стена и основа, обем на пирамида.
- разбиране на връзките между дадените (основен и околен ръб) и неизвестни елементи (височината на пирамидата и елементите на основата).
- разбиране на елементи на равностранен триъгълник и връзките между тях (между страни, височини, радиус на описана/вписана окръжност) и на лице на равностранен триъгълник.
- разбиране на понятието тангенс и изразяването му чрез страните на правоъгълен триъгълник.

2. ИЗГРАЖДАНЕ НА ИДЕЯ И СЪСТАВЯНЕ ПЛАН НА РЕШЕНИЕТО

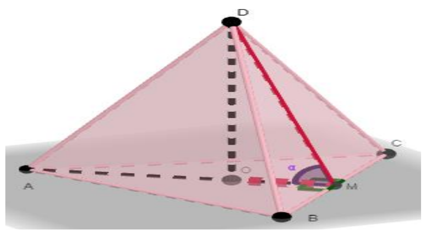
- построяване на чертеж на дадената пирамида.

1. Построяване на ортогоналната проекция на върха върху равнината на основата на пирамидата. (Фиг. 1а)

2. Построяване на линейния ъгъл на двустенния ъгъл между околната стена и основата на пирамидата. (Фиг. 1б)



Фиг. 1а. Ортогоналната проекция на върха върху равнината на основата на пирамида



Фиг. 1б. Линейният ъгъл на двустенния ъгъл между околната стена и основата на пирамидата

- **изграждането на идея и откриването на решението** може да се извърши по схемите:

(1) Намиране на обема на пирамидата

<table>
<tr><td rowspan="5">$V = ? \leftarrow V = \frac{1}{3}BH$</td><td rowspan="2">$B = ?$</td><td>$\Delta ABC -$ *равностранен триъгълник*</td></tr>
<tr><td>$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \leftarrow a$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$H = ?$</td><td>$\Delta BOD -$ *правоъгълен* $\left(\angle BOD = 90^0\right) \leftarrow DO \perp OB \leftarrow DO \perp \left(ABC\right)$</td></tr>
<tr><td>$OB \leftarrow \Delta ABC -$ *равностранен*, $OB = R\left(R = \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) \leftarrow a$</td></tr>
<tr><td>$DB = l = 4$</td></tr>
</table>

Основни задачи-компоненти:

1. Намиране на лице на равностранен триъгълник $\left(B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \right)$.
2. Намиране на радиуса на описана окръжност около равностранен триъгълник $\left(R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \right)$.
3. Доказване, че $DO \perp OB$ и следователно $\Delta BOD - \textit{правоъгълен} \left(\angle BOD = 90^0 \right)$.
4. Решаване на правоъгълен триъгълник (намиране на катет по даден хипотенуза и другия катет).
5. Намиране на обем на пирамида.

План на решението:

1. Намиране лицето B на ΔABC
2. Намиране на OB
3. Намиране на височината на пирамидата $DO = H$
4. Намиране на обема V на пирамидата.

(2) Намиране на тангенса на ъгъла между околна стена и равнината на основата може да се извърши по схемата:

$tg\alpha = ? \leftarrow$	Построяване на линеен ъгъл на двустенен ъгъл	околна стена	равнобедрен триъгълник
			височина към основата на равнобедрен триъгълник
		основа	равностранен триъгълник
			височина на равностранен триъгълник
		перпендикулярност на права и равнина	
	Решаване на ΔMOD	$\Delta MOD - \textit{правоъгълен} \left(\angle MOD = 90^0 \right) \leftarrow DO \perp OM \leftarrow DO \perp \left(ABC \right)$	
		$OM \leftarrow \Delta ABC - \textit{равностранен}, OM = r \left(r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \right) \leftarrow a$	
		$tg\alpha = tg\angle OMD \left(tg\alpha = \dfrac{DO}{OM} \right)$	DO
			OM

Основни задачи-компоненти:

1. Построяване на линеен ъгъл на двустенен ъгъл.
2. Решаване на равнобедрен и равностранен триъгълник.
3. Намиране на радиуса на вписана окръжност в равностранен триъгълник $\left(r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \right)$.
4. Намиране на радиуса на описана окръжност около равностранен триъгълник $\left(R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \right)$.
5. Доказване, че $DO \perp OM$ и следователно, че $\Delta DOM - \textit{правоъгълен} \left(\angle MOD = 90^0 \right)$.
6. Решаване на правоъгълен триъгълник.
7. Изразяване на $tg\alpha$ чрез страните на правоъгълния ΔDOM .

План на решението:

1. Построяване на линейния ъгъл на двустенния ъгъл между околна стена и основа
2. Намиране на OM
3. Намиране на $tg\alpha$.

3. РЕАЛИЗИРАНЕ НА ПЛАНА И РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧАТА

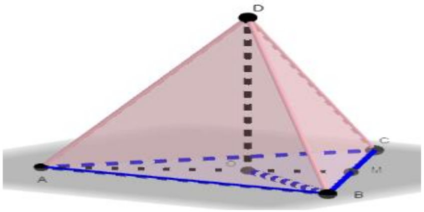
Решение:

(1) Намиране на обема на пирамидата

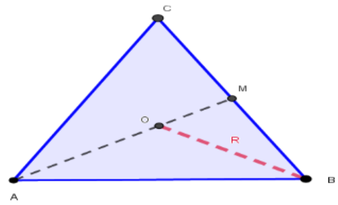
От равностранния триъгълник ABC намираме:

1. Лицето B на $\Delta ABC \rightarrow$ $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

2. $OB = R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. (Фиг. 2а и Фиг. 2б)



Фиг. 2а. Пирамидата $ABCD$

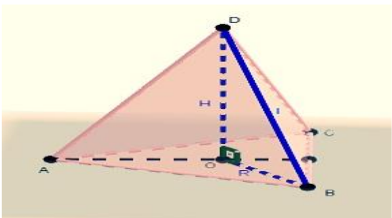


Фиг. 2б. Основата на пирамидата $ABCD$ – равностранен ΔABC

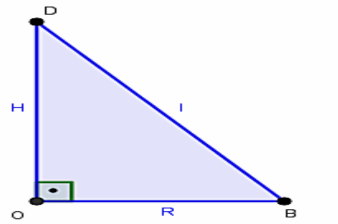
$DO \perp p(ABC) \Rightarrow DO$ по определение е перпендикулярна на всяка права от равнината (ABC), $OB \subset p(ABC) \Rightarrow DO \perp OB \Rightarrow \Delta BOD$ $\left(\angle BOD = 90^0\right)$ е правоъгълен. (Фиг. 3а и Фиг. 3б)

От $\Delta BOD\left(OB = 2\sqrt{3};\ DB = 4\right)$ по питагоровата теорема получаваме:

$DO^2 = DB^2 - OB^2 \quad DO^2 = 4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow DO = 2 \quad \Rightarrow DO = H = 2$



Фиг. 3а. Пирамидата $ABCD$



Фиг. 3б. ΔBOD с катет височината на пирамидата OD

$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}.9\sqrt{3}.2 = 6\sqrt{3} \qquad V = 6\sqrt{3}$

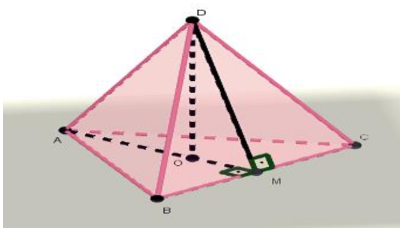
(2) Намиране на $tg\alpha$

ΔBCD– равнобедрен $(BD = CD)$

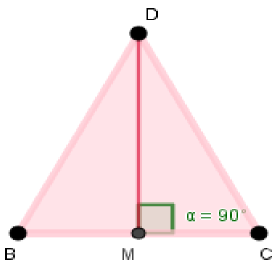
$DM \perp BC,\ M \in BC \Rightarrow M$ е среда на отсечката BC. (Фиг. 4а и Фиг. 4б)

ΔABC е равностранен, $AM,\ M \in BC$ е медиана.

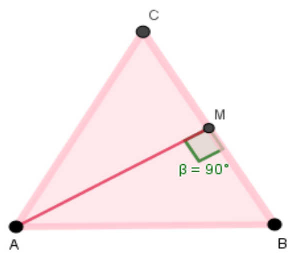
Следователно $AM \perp BC,\ M \in BC$ (Фиг. 4а и Фиг. 4в)



Фиг. 4а. Пирамидата $ABCD$



Фиг. 4б. Околна стена на пирамидата – ΔBCD

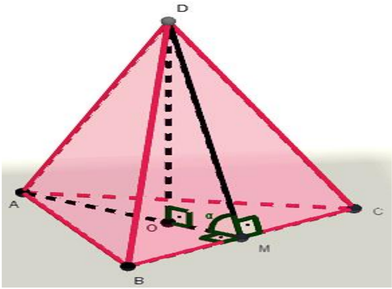


Фиг. 4в. ΔABC – основа на пирамидата

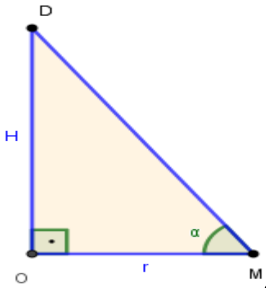
Следователно ъгълът между равнините BCD и ABC е $\angle OMD$ и означаваме $\angle OMD = \alpha$.

$DO \perp p(ABC), OM \subset p(ABC) \Rightarrow DO \perp OM$

Следователно ΔMOD е правоъгълен $\left(\angle MOD = 90^0\right)$. (Фиг. 5а и Фиг. 5б)

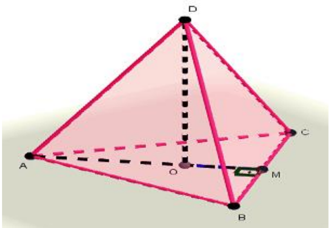


Фиг. 5а. Пирамидата $ABCD$

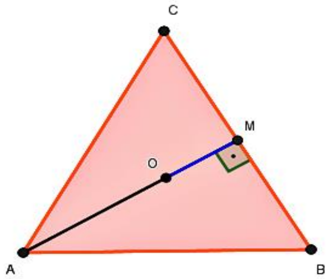


Фиг. 5б. ΔMOD с ъгъл α $\left(\angle MOD = 90^0\right)$

От равностранния ΔABC намираме $OM = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$. (Фиг. 6а и Фиг. 6б)



Фиг. 6а. Пирамидата $ABCD$



Фиг. 6б. Основата на пирамидата – равностранният ΔABC

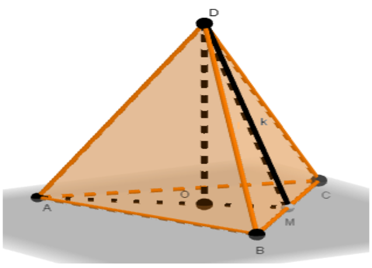
$DO = H = 2$

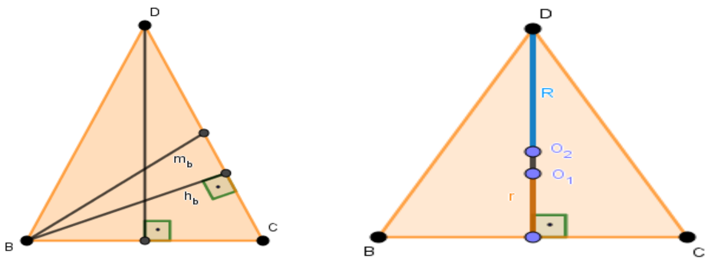
$$tg\alpha = \frac{DO}{OM} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

4. ДОПЪЛНИТЕЛНА РАБОТА ПО ЗАДАЧАТА СЛЕД РЕШЕНИЕТО ѝ (ПОГЛЕД НАЗАД)

Основните дейности и задачи тук могат да бъдат:

1. Намиране на останалите основни елементи на пирамидата – апотемата k, ъгълът между околен ръб и равнината на основата, лицето на околна и пълна повърхнина на пирамидата и др.
2. Намиране на елементите на основата и околните стени – височини, медиани, ъглополовящи, ъгли, радиуси на вписана и описана окръжност, лице и др. (Фиг. 7а и Фиг. 7б)

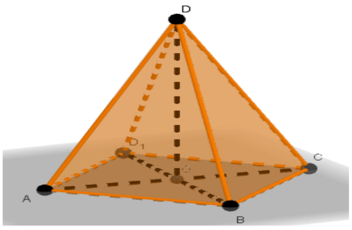




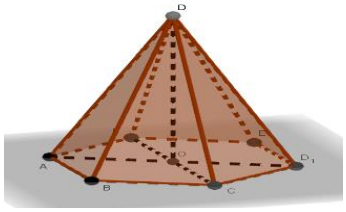
Фиг. 7а. Пирамидата $ABCD$

Фиг. 7б. ΔBCD и елементите му

3. Трансформиране на дадената задача в задача със същите или променени числови данни за правилна четириъгълна и/или правилна шестоъгълна пирамида. (Фиг. 8а и Фиг. 8б)



Фиг. 8а. Правилна четириъгълна пирамида



Фиг. 8б. Правилна шестоъгълна пирамида

4. Обосноваване на ъгъла между околна стена и равнината на основата с теоремата за трите перпендикуляра.
5. Доказване, че върхът на пирамида се проектира ортогонално в центъра на описана окръжност около основата тогава и само тогава, когато околните ръбове/ъглите между околните ръбове и равнината на основата са равни.
6. Доказване, че върхът на пирамида се проектира ортогонално в центъра на вписана окръжност в основата тогава и само тогава, когато апотемите (височините на околните стени, спуснати от върха на пирамидата)/ъглите между околните стени и равнината на основата са равни.
7. Намиране на ъгъла между две (съседни) околни стени, елементите на триъгълника, който го съдържа и зависимостите между тях.
8. Намиране на други начини на решение на задачата.
9. Илюстриране на центровете на вписана и описана сфера за дадената пирамида.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучаването на знания от стереометрията и решаването на стереометрични задачи се улеснява и онагледява чрез използване предимствата на GeoGebra – показват се етапите на построяване на дадена фигура и нейните елементи, те се променят динамично или се оцветяват за открояване на важни за решението зависимости. Така се развива пространственото мислене и се повишава интересът към изучаване на стереометрични знания.

REFERENCES

Yu. Doshkova, Novite tehnologii za matematicheski Web saytove, sbornik dokladi „Inovatsii v programnite tehnologii, algoritmi i obuchenieto vav visshite uchilishta, svarzano s tyah", Veliko Tarnovo, 2010, 79-84. (**Оригинално заглавие**: Ю. Дошкова, Новите технологии за математически Web сайтове, сборник доклади „Иновации в програмните технологии, алгоритми и обучението във висшите училища, свързано с тях", Велико Търново, 2010, 79-84.

Burrus, C.S.,T.W.Parks. DFT/FFT and Convolution Algorithms. John Wiley&Sons, New York, 1989.

Cooper, A., & Wilson, A. (2002). *Extending the relevance of TSA research for the UK: general equilibrium and spill over analysis*. Paper presented at the 6th International Forum on Tourism Statistics, 25th-27th September 2002, Budapest.

Papamichalis, P. DSP applications with the TMS320 family. Texas Instruments, 1994.

Polya, D. (1972). Kak se reshava zadacha. Sofia: Narodna prosveta. (**Оригинално заглавие:** Пойа. Д. 1972. Как се решава тази задача. София: Народна просвета.)