

**MULTI-OBJECTIVE SYNTHESIS OF MULTI-STAGE  
GRAVITATIONAL TRANSPORT<sup>11</sup>**

---

**Assoc. Prof. Venko Vitliemov, PhD**

Department of Technical Mechanics,  
University of Ruse, Bulgaria  
Phone: 082 888 224  
E-mail: venvit@uni-ruse.bg

**Assoc. Prof. Velina Bozduganova, PhD**

Department of Technical Mechanics,  
University of Ruse, Bulgaria  
Phone: 82 888 572  
E-mail: velina@uni-ruse.bg

**Assoc. Prof. Julian Angelov, PhD**

Department of Technical Mechanics,  
University of Ruse, Bulgaria  
Phone: 82 888 247  
E-mail: julian@uni-ruse.bg

***Abstract:** A multicriteria model problem for parametric synthesis of partially rectilinear longitudinal profile of a multistage gravitational chute has been formulated and solved. An evaluation system of criteria for mechanical perfection is selected, based on generalized dynamic characteristics (criterion actions) of analytical mechanics. An efficient computational procedure for multicriteria optimization by the PSI (Parameter Space Investigation) method is proposed, supplemented by  $\mu$ -selection of ranked Pareto-optimal subsets of compromise solutions. For some specific requirements to the gravity chute from a children's slide is determined Salukvadze optimal longitudinal profile.*

***Keywords:** gravity chute, multicriteria parametric synthesis, PSI method,  $\mu$ -selection, ranked Pareto subsets, Salukvadze optimum.*

## **УВОД**

Редица технологични процеси и устройства реализират транспортни операции на къси разстояния, свързани с разтоварване, хранване, прехвърляне или преместване на единични тела и материали с дискретна макроструктура. За тази цел обикновено се използват праволинейни едно- или многостепенни гравитационни улеи. Такива устройства се прилагат при земеделски и пътно-строителни машини, сортировъчни улеи, детски пързалки (фиг. 1a), устройства за спешно евакуиране при пожари от сгради (фиг. 1b), самолети и стартови площадки на космодруми (фиг. 1c). Този вид транспортиращи устройства имат проста и евтина конструкция, висока степен на екологосъобразност и надеждност, защото не се нуждаят от допълнителни енергийни ресурси.

Основното изискване към гравитационния улей е да осигурява непрекъснато транспортиране със скорост, която не превишава допустимата максимална скорост за конкретния вид премествано тяло. В редица случаи са налице допълнителни изисквания за невъзникване на ударни явления, повишено износване или недопустими инерционни претоварвания.

Ефективността на транспортирането с гравитационен улей зависи съществено от избора на неговите конструктивни параметри. Праволинейните улеи осигуряват по-голяма плавност на транспортиране от криволинейните, но имат по-малко бързодействие. Тъй като

---

<sup>11</sup> Докладът е представен в секция „Механика и машиностроителни технологии“ на 13 ноември 2020 с оригинално заглавие на български език: МНОГОКРИТЕРИАЛЕН СИНТЕЗ НА ГРАВИТАЦИОНЕН СЪСТАВЕН ТРАНСПОРТЪОР

времетраенето на спускането определя производителността на транспортиращото устройство, обикновено задачата за неговото оптимално проектиране се обвързва с постигане на минимално времетраене на спускането. Така възниква много широк клас от моделни задачи за синтез на почастно праволинейни брахистохрони с надлъжен профил, осигуряващ максимално бързодействие (Витлиемов, 2019).



Фиг. 1. Многостепенни гравитационни улеи

Наличието на противоречиви изисквания и ограничения от технологичен характер усложняват съществено задачите за оптимизационен синтез. Показателен пример е синтезът на надлъжен профил на детските пързалки или сортировъчните захранващи улеи. Освен редица изисквания, регламентирани от съществуващите стандарти за безопасност при пързалките, или достатъчна производителност на захранващите улеи, механичното им съвършенство трябва да се оценява с противоречиви критерии. Такива например са: бързодействие, съчетано с минимално текущо ускорение на транспортираното тяло; максимална дължина на улея или постигане на минимална крайна скорост; минимални дисипативни загуби и робастност на математичния модел към флуктуации на възникващото съпротивление от триене. Всяка решена задача от този вид ни приближава към открояване на общи закономерности за целия клас задачи за многокритериален синтез и съдейства за създаване на ефективна изчислителна технология за неговото решаване.

## ИЗЛОЖЕНИЕ

### Механичен модел

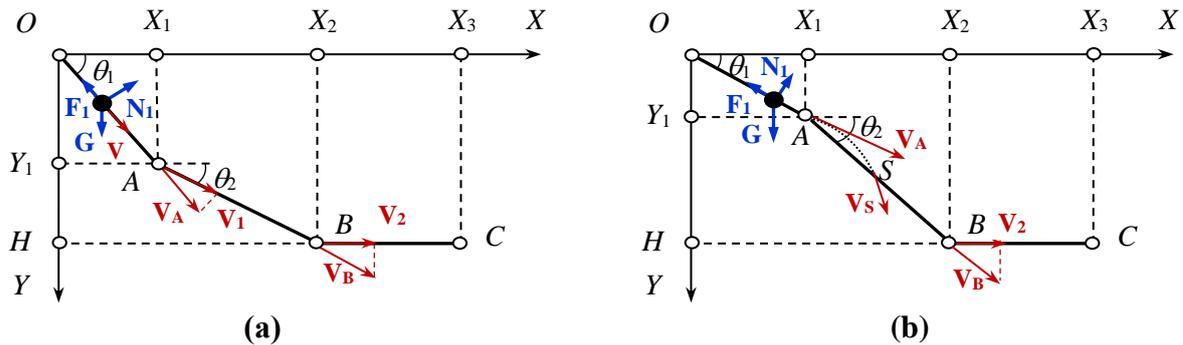
Разглеждаме моделна задача (Витлиемов и др., 2017) за оптимизационен синтез на надлъжен профил на тристепенен почастно праволинейен гравитационен улей за транспортиране чрез плъзгане на единични тела от зададена височина  $H$ , който има два наклонени и един хоризонтален участък (фиг. 2).

Транспортираното тяло се моделира като материална точка  $M$  с маса  $m$ , която се спуска по улея без начална скорост ( $V_0 = 0$ ) и спира движението си в края на хоризонталния участък. Моделът материална точка и надлъжният профил с почастно праволинейни участъци осигуряват максимална общност на резултатите от оптимизационния синтез без да се конкретизират размерите на транспортираното тяло и допълнително използваните закръгления на стъпаловидните преходи между отделните участъци. В зависимост от съотношението на ъглите  $\theta_1$  и  $\theta_2$  тези преходи са свързани с различни механични процеси.

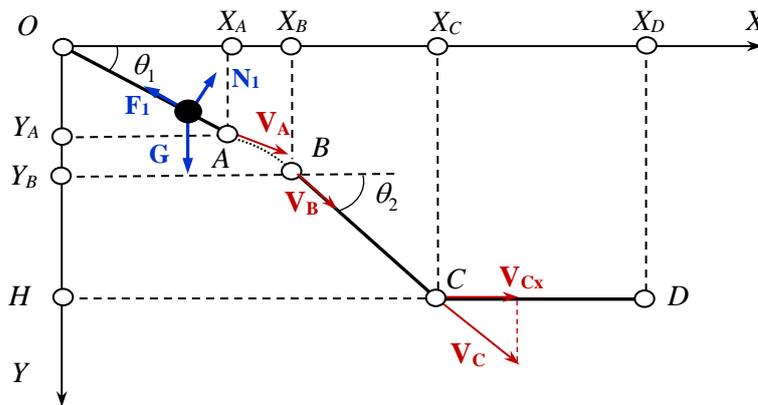
При  $\theta_1 > \theta_2$  (фиг. 2a) в точка  $A$  възниква удар. Обикновено се приема опростяващата предпоставка (Витлиемов, 2019), че импулсът на материалната точка  $M$  се запазва по направление на нейното движение, а в перпендикулярно направление е равен на нула. Например движението в първия участък на фиг. 2a завършва в точка  $A$  със скорост  $V_A$ , но продължава с проектираната върху направлението на втория участък скорост  $V_1$ .

При  $\theta_1 < \theta_2$  (фиг. 2b) материалната точка  $M$  се отделя в положение  $A$  от втората

наклонена равнина и извършва свободно движение под действие на теглото си с начална скорост  $\mathbf{V}_A$ , след което следва удар в точка  $S$  от участъка  $AB$ .



Фиг. 2. Надлъжен профил на тристепенен гравитационен улей



Фиг. 3. Надлъжен профил на тристепенен гравитационен улей с изместен втори участък

В настоящата работа се изследва моделът за случая  $\theta_1 < \theta_2$ , при който участъкът  $BC$  е изместен по определен начин спрямо точка  $A$  (фиг. 3). Точката  $M$  извършва свободно движение между двете си положения  $A$  и  $B$ . Предлага се в участъка  $AB$  да се постави параболично закръглена повърхнина, при което точката  $B$  е разположена върху траекторията на материалната точка  $M$  така, че участъкът  $BC$  е наклонен под ъгъл  $\theta_2$ . В този модел преходните точки са:

- $A$  – преход от несвободно към свободно движение без промяна на скоростта;
- $B$  – преход от свободно към несвободно движение без промяна на скоростта;
- $C$  – удар с промяна на скоростта от  $\mathbf{V}_C$  на  $\mathbf{V}_{Cx}$  според посочената опростяваща предпоставка (Витлиемов, 2019).

В праволинейните участъци върху точката  $M$  са приложени две сили: теглото  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ ; реакцията на неудържащата направляваща линия с компоненти нормалната реакция  $\mathbf{N}_i$  и силата на кулоново триене  $\mathbf{F}_i = -\mu_c |\mathbf{N}_i| \mathbf{V} / |\mathbf{V}|$ ,  $i = 1, 2, 3$ , където  $\mu_c$  е коефициентът на динамично триене,  $\mathbf{V}$  – текущата скорост на точката  $M$ ,  $\mathbf{g}$  – гравитационното ускорение.

В участъка  $AB$  точката  $M$  се движи по парабола  $Y = Y(T)$  в интервала от време  $\mathbf{I}_T = [0, T_p]$  с начална скорост  $V_A$  и ускорение  $\mathbf{a}_p = \mathbf{g}$ . Тъй като тя не си взаимодейства с параболичната повърхнина, нормалната реакция в този участък е  $\mathbf{N}_p(T) \equiv \mathbf{0}$ ,  $T \in \mathbf{I}_T$ . Това условие е неприемливо за пързалка, но то винаги може да се замени с изискване за синтезиране на активна направляваща линия  $Y^* = Y^*(T)$ , за която  $|\mathbf{N}_p(T)| < \varepsilon$ ,  $T \in \mathbf{I}_T$ , където  $\varepsilon > 0$  е избрана достатъчно малка величина. Задачата за синтез на пасивноуправлявано движение по достатъчно близка (с точност до  $\varepsilon$ ) направляваща линия до квадратна парабола е решена във (Витлиемов, 2019).

Основното уравнение на динамиката за всеки праволинейен участък е

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{G} + \mathbf{N}_i + \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

където  $\mathbf{a}_i$  са съответните ускорения с мерки:  $a_1 = g(\sin\theta_1 - \mu_c \cos\theta_1)$ ;  $a_2 = g(\sin\theta_2 - \mu_c \cos\theta_2)$ ;  $a_3 = -\mu_c g$ .

Въвеждаме следните безразмерни величини и означения:

$$\begin{aligned} u_1 &= l_1/H, \quad u_2 \equiv \theta_1, \quad u_3 \equiv \theta_2, \quad t_i = T_i/(H/g)^{1/2}, \quad \tau = T_p/(H/g)^{1/2}, \\ v_A &= V_A/(Hg)^{1/2}, \quad v_B = V_B/(Hg)^{1/2}, \quad v_C = V_C/(Hg)^{1/2}, \quad b_i = a_i/g, \\ x_A &= X_A/H = u_1 \cos\theta_1, \quad y_A = Y_A/H = u_1 \sin\theta_1, \\ x_B &= X_B/H = x_A + v_A \tau \cos\theta_1, \quad y_B = Y_B/H \equiv y_A + v_A \tau \sin\theta_1 + \tau^2/2, \\ x_C &= X_C/H \equiv x_B + (1 - y_B)/\operatorname{tg}\theta_2, \quad x_D = X_C/H = x_C + l_3 \\ l_2 &= [(x_C - x_B)^2 + (1 - y_B)^2]^{1/2}, \quad l_3 = v_{Cx}^2/(2\mu_c), \\ b_1 &= \sin\theta_1 - \mu_c \cos\theta_1, \quad b_p = a_p/g = 1, \quad b_2 = \sin\theta_2 - \mu_c \cos\theta_2, \quad b_3 = -\mu_c, \\ v_A &= (2u_1 b_1)^{1/2}, \quad \tau = v_A (\cos\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 - \sin\theta_1), \\ v_B &= [(v_A \cos\theta_1)^2 + (v_A \sin\theta_1 + \tau)^2]^{1/2}, \quad v_C = (v_B^2 + 2l_2 b_2)^{1/2}, \\ t_1 &= v_A/b_1, \quad t_2 = (v_C - v_B)/b_2, \quad t_3 = v_{Cx}/\mu_c, \\ t_f &= \sum_i t_i + \tau, \quad n_i = N_i/mg, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

където  $t_i$  са безразмерните времена на движение в праволинейните участъци,  $\tau$  – в криволинейния участък  $AB$ , а  $l_i$  – техните безразмерни дължини.

Направляването на точката  $M$  е стеснено от следните ограничения

$$\begin{aligned} q_1 &= \mu_c - \operatorname{tg}\theta_1 \leq 0, \quad q_2 = \mu_c - \operatorname{tg}\theta_2 \leq 0, \quad q_3 = -v_{Cx} \leq 0, \\ q_4 &= \theta_1 - 40\pi/180 \leq 0, \quad q_5 = \theta_2 - 60\pi/180 \leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Тук  $q_1, \dots, q_3$  осигуряват физически смисъл на използвания модел, а  $q_4$  и  $q_5$  са препоръчителни изисквания, характерни за конвенционални конструкции на детски пързалки (Гуць и др., 2016).

### Критерии за оптималност

В Таблица 1 са представени някои класически „действия”, изразяващи вариационни принципи на аналитичната механика (Горский, 1995). Избраните критериални действия определят разходите на механични средства (принуда, енергия, работа, време) за характерен времеви интервал. Критерият  $f_A$  е мярка за напрегнатостта на динамичния режим на механичната система;  $f_{G_s}$  характеризира структурата на системата и наложените връзки;  $f_D$  и  $f_L$  определят загубите на „количество на движение – време“ и „кинетична енергия – време“;  $f_B$  е критерий за изразходвания импулс на обобщените сили, а  $f_{C-p}$  – за извършената механична работа;  $f_{G_i}$  – оценка за бързодействието на транспортирането. Между механичните системи, предназначени да функционират при еднакво качество, най-съвършена по даден критерий е тази, която има минимално критериално действие.

За отчитане стойностите на някои геометрични, кинематични и динамични характеристики са въведени допълнителни критерии. Локалните критерии  $f_R$  и  $f_V$  характеризират хоризонталния габарит на гравитационния улей и големината на скоростта, с която товарът постъпва във финалния участък  $CD$ . Интегралните критерии  $f_S$  и  $f_N$  са мерки съответно на чувствителността на механичния модел към вариации на динамичния коефициент на триене  $\mu_c$  в околност на неговия номинал  $\mu_c^\circ$  (Цонев и др., 2004) и на упражнявания нормален натиск  $N_i$  от транспортираното тяло върху улея.

Таблица 1. Критерии за оптималност

Критериално действие на		Критерии ( $i = 1, 2, 3$ )
P. Appell	$\frac{1}{2} \int_0^t b^2 dt$	$f_A = \frac{1}{2} (\sum_i t_i b_i^2 + \tau)$
K. Gauss	$\frac{1}{2} \int_0^t (1-b)^2 dt$	$f_{Gs} = \frac{1}{2} \sum_i t_i (1-b_i)^2$
R. Descartes	$\int_0^t  v  dt$	$f_D = [(\sum_i t_i^2 b_i)/2 + t_2 v_B + t_3 v_{Cx}] + f_{Dp}$
J. Lagrange	$\frac{1}{2} \int_0^t v^2 dt$	$f_L = \frac{1}{2} [(\sum_i t_i^3 b_i^2)/3 + t_2^2 b_2 v_B + t_3^2 b_3 v_{Cx} + t_2 v_B^2 + t_3 v_{Cx}^2] + f_{Lp}$
J. Buridan	$\int_0^t  b  dt$	$f_B = \sum_i t_i  b_i  + \tau$
G. Coriolis – J. Poncelet	$\int_0^t  b v  dt$	$f_{C-P} =  t_1^2 b_1^2/2  +  b_2(t_2^2 b_2/2 + t_2 v_B)  +  b_3(t_3^2 b_3/2 + t_3 v_{Cx})  + f_{Dp}$
G. Galilei	$\int_0^t 1 dt$	$f_{Gi} = \sum_i t_i + \tau$ $f_R = x_D$ $f_S = \sum_i t_i  \partial b_i / \partial \mu_c _{\mu_c = \mu_c^0} = t_1 x_A + t_2 x_B + t_3$ $f_N = \sum_i t_i n_i = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3$ $f_V = v_{Cx}$

Въведените частни критерии се обединяват във векторен критерий  $\mathbf{f} = [f_A, f_{Gs}, f_D, f_L, f_B, f_{C-P}, f_{Gi}, f_R, f_S, f_N, f_V]$ , който подлежи на съгласувано минимизиране. Тъй като отсъства информация за характера и степента на влияние на варируемия параметричен вектор  $\mathbf{u}$  върху оценъчната система от критерии е прието, че те са равноценни.

Добавките към критериите за участъка  $AB$  са:

$$f_{Ap} = \frac{1}{2} \tau; \quad f_{Gsp} = 0; \quad f_{Dp} = \int_0^\tau |v| dt; \quad f_{Lp} = \frac{1}{2} \int_0^\tau v^2 dt; \quad (4)$$

$$f_{Bp} \equiv f_{Gip} = \tau; \quad f_{(C-P)p} \equiv f_{Dp}; \quad f_{Rp} \equiv f_{Sp} \equiv f_{Np} = 0.$$

Като вземем предвид, че

$$v^2 = (v_A \cos \theta_1)^2 + (v_A \sin \theta_1 + t)^2, \quad |v| = (d_1 + d_2 t + t^2)^{1/2}, \quad \text{където } d_1 = v_A^2, \quad d_2 = 2v_A \sin \theta_1,$$

след интегриране получаваме зависимостите:

$$f_{Dp} = (d_2/4 + \tau/2)(d_1 + d_2 \tau + \tau^2)^{1/2} + \ln [d_2/2 + \tau + (d_1 + d_2 \tau + \tau^2)^{1/2}] (d_1/2 - d_2^2/8) + C; \quad (5)$$

$$C = -d_2 d_1^{1/2}/4 - \ln (d_2/2 + d_1^{1/2})(d_1/2 - d_2^2/8); \quad f_{Lp} = (d_1 \tau + d_2 \tau^2/2 + \tau^3/3)/2.$$

### Оптимизационна задача

Задачата за многокритериален параметричен синтез приема вида

$$\mathbf{u}^* = \arg \text{Pmin}_{\mathbf{u} \in \mathbf{D}} \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{D} = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{E}^3: \mathbf{q}(\mathbf{u}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{u} \in \Pi \}, \quad \Pi = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{E}^3: \mathbf{u}^- \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^+ \}, \quad (6)$$

където: “Pmin” е операторът за определяне на глобално Парето-минимални компромисни стойности на векторния критерий  $\mathbf{f}$ ;  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  е векторът на управляваните постоянни параметри, разглеждан като точка на 3-мерното евклидово пространство  $\mathbf{E}^3$ ;  $\mathbf{u}^-$  и  $\mathbf{u}^+$  са зададените гранични стойности на вектора  $\mathbf{u}$ ;  $\mathbf{q}(\mathbf{u}) = [q_1(\mathbf{u}), q_2(\mathbf{u}), \dots, q_5(\mathbf{u})]$  – наложените

параметрични ограничения. Границите  $\mathbf{u}^-$  и  $\mathbf{u}^+$  на интервалната област  $\Pi$  се определят с числен експеримент така, че Парето-оптималните точки  $\mathbf{u}^*$  да са вътрешни за тази област.

### Оптимизационна процедура

Решаването на екстремални задачи от вида (6) се основава на принципа за съгласувана оптималност на В. Парето (Ehrgott, 2005). Оптималното решение  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*)$  се състои от две Парето-множества  $\mathbf{D}^* = \{\mathbf{u}^*: \mathbf{u}^* = \arg \text{Pmin}_{\mathbf{u} \in \mathbf{D}} f(\mathbf{u})\}$  и  $\mathbf{P}^* = \{\mathbf{f}^*: \mathbf{f}^* = \mathbf{f}(\mathbf{u}^*)\}$  с неподобрени точки  $\mathbf{u}^* \in \mathbf{D}^*$  и  $\mathbf{f}^* \in \mathbf{P}^*$ . Изборът на едно компромисно решение се улеснява значително, ако се осъществи от обосновано намалени подмножества на  $\mathbf{D}^*$  и  $\mathbf{P}^*$ . Оптимизацията се извършва в два етапа.

В Етап 1 се определят приблизително Парето-оптимални множества  $\mathbf{D}^*$  и  $\mathbf{P}^*$  по метода PSI (Parameter Space Investigation) за изследване на многомерни области чрез квази равномерно сондиране със Соболев'еви пробни точки (Соболев и др., 2006). Многократното изпълняване на този етап за обновявана област  $\Pi$  повишава пълнотата на тези множества.

В Етап 2 се селектират ранжирани по компромисна ефективност Парето-подмножества с помощта на минималните стойности  $\mu_i^*$ ,  $i \in \mathbf{I}_i = \{1, 2, 3\}$  на компонентите на векторен критерий  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \mu_3]$  от множеството  $\mathbf{M} = \{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{f}^*) \in \mathbf{E}^3: \mathbf{f}^* \in \mathbf{P}^*\}$  (Витлиев и др., 2017). Те съответстват на разстоянията между три характерни точки: положителната утопична точка  $\mathbf{f}^U$ ; текущата компромисна точка  $\mathbf{f}^*$  и нейната проекция  $\mathbf{f}^{UN}$  върху хиперправата  $UN$ , която съединява положителната  $\mathbf{f}^U$  и негативната  $\mathbf{f}^N$  утопични точки с компоненти безкомпромисните екстремуми на частните критерии. В регулярния случай минималните разстояния  $\mu_i^*$  съответстват на различни Парето-оптимални точки  $\mathbf{f}^*$ .

С помощта на векторния критерий  $\boldsymbol{\mu}^p = [\mu_1^p, \mu_2^p, \mu_3^p]$ ,  $p \in \mathbf{I}_p = \{1, 2, \dots, N_p\}$ , за всяка Парето-оптимална точка  $\mathbf{f}^{*p} \in \mathbf{P}^*$  множеството  $\mathbf{P}^*$  се трансформира в точка на множество  $\mathbf{M} = \{\boldsymbol{\mu}^p \in \mathbf{E}^3: p \in \mathbf{I}_p\}$  в тримерното  $\boldsymbol{\mu}$ -пространство.

В  $\mathbf{M}$  се изследват всички възможни комбинации от два критерия  $\{\mu_t^p, \mu_h^p\}$ ,  $t \neq h$ ,  $t, h \in \mathbf{I}_i$ . За всяка двойка критерии се селектират подмножества от Парето-оптимални точки  $\mathbf{M}_\rho = \{\boldsymbol{\mu}^p \in \mathbf{E}^3: \mu_i^{*p,t} \leq \mu_t^p \leq \mu_i^{*p,h}, h \neq t, t, h \in \mathbf{I}_i, p \in \mathbf{I}_p\} \subset \mathbf{M}$ ,  $\rho \in \mathbf{I}_\rho = \{1, 2, \dots, 6\}$ , където минимизиращата точка  $\mu_h^{*p,h} = \min_{p \in \mathbf{I}_p} \{\mu_h^p\}$  на даден критерий  $\mu_h^p$ ,  $h \in \mathbf{I}_i$  се използва като горна граница при селекцията по друг критерий  $\mu_t^p$ ,  $t \neq h$ ,  $t \in \mathbf{I}_i$ , а точката минимум  $\mu_i^{*p,t} = \min_{p \in \mathbf{I}_p} \{\mu_t^p\}$  на критерия  $\mu_t^p$  – като долна граница. Всяка селектирана по този начин точка  $\boldsymbol{\mu}^o \in \mathbf{M}_\rho$ ,  $\rho \in \mathbf{I}_\rho$  и съответстващата ѝ точка  $\mathbf{f}^o \in \mathbf{P}_{R^*} \subset \mathbf{P}^*$  получават като индивидуална оценка число  $R_E = \max \{\rho\}$ , което определя техния ранг на компромисна ефективност. Това число съответства на броя  $\rho$  на подмножествата  $\mathbf{M}_\rho$  в обединеното множество  $\mathbf{M}_R = \{\cup_{\rho \in \mathbf{I}_\rho} \mathbf{M}_\rho\}$ , на което принадлежи  $\boldsymbol{\mu}^o \equiv \boldsymbol{\mu}(\mathbf{f}^o)$ .

В регулярния случай подмножеството на  $\mathbf{P}_{R^*}$  с най-висок ранг  $R_E = 6$  съдържа само една точка  $\mathbf{f}^S \equiv \mathbf{f}(\mathbf{u}^S)$ , която съответства на Салуквадзе-оптималното решение  $(\mathbf{u}^S = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{D}} \mu_3(\mathbf{f}(\mathbf{u})), \mathbf{f}^S)$  (Salukvadze, 2012). Това решение разкрива потенциалните възможности за равномерно доближаване на частните критерии до техните безкомпромисни оптимални стойности при допускането, че те са равноценни.

Окончателното компромисно решение се избира след анализ на ранжираните Парето-оптимални подмножества в  $\mathbf{P}_{R^*}$ . Ако Салуквадзе-оптимумът се оцени като неприемлив относно достигнатото ниво на компромис по някой от частните критерии, последователно се анализират подмножествата на  $\mathbf{P}_{R^*}$  с по-нисък ранг, докато се направи еднозначен избор.

### Резултати

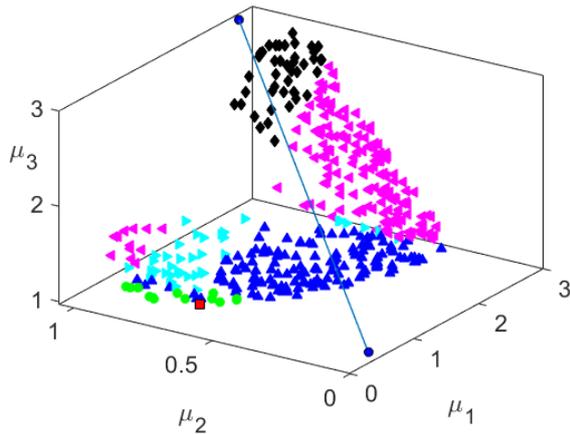
Оптимизационната задача (6) е решена за  $H = 1.45$  m и  $\mu_c \equiv \mu_c^o = 0.3$  с MATLAB-програмата `psims` за многокритериална параметрична оптимизация, документирана в (Йорданов и др., 2013).

В Етап 1 на оптимизационната процедура началната област  $\Pi = \{[0.2, 0.524, 0.873] \leq \mathbf{u} \leq$

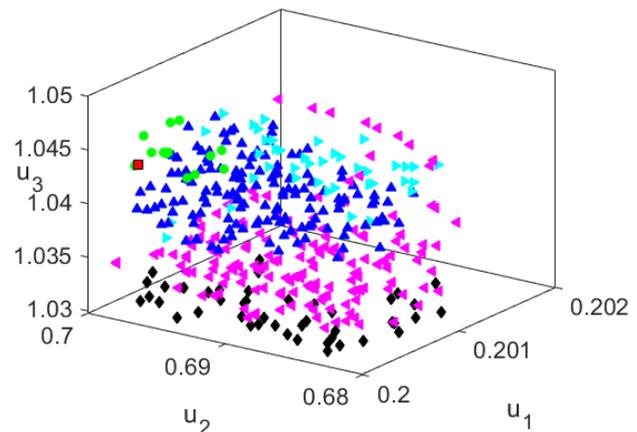
$[0.4, 0.698, 1.047]$  } е обновена чрез последователно сондиране до  $\Pi = \{ [0.2, 0.681, 1.03] \leq \mathbf{u} \leq [0.3, 0.698, 1.047] \}$ , от която след двукратно сондиране с  $2^{10}$  и  $2^8$  допустими Соболев'еви точки е определен Парето-оптимален фронт  $\mathbf{P}^*$  от 415 точки.

В Етап 2 с  $\mu$ -селекция са определени шест непразни подмножества  $\mathbf{P}_R^* \subset \mathbf{P}^*$ , ранжирани по ранг на компромисна ефективност  $R_E \in \mathbf{M}_R = \{6, 5, \dots, 1\}$ . Салуквадзе-оптималното решение е:  $(\mathbf{u}^S = [0.200, 0.697, 1.044]; \mathbf{f}^{S^o} = [1.003, 1.017, 1.000, 1.003, 1.005, 1.002, 1.004, 1.001, 1.003, 1.003, 1.004])$ , където векторът  $\mathbf{f}^{S^o}$  е с нормирани компоненти  $f_k^{S^o} / [\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{D}} f_k(\mathbf{u})]$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, 11\}$ .

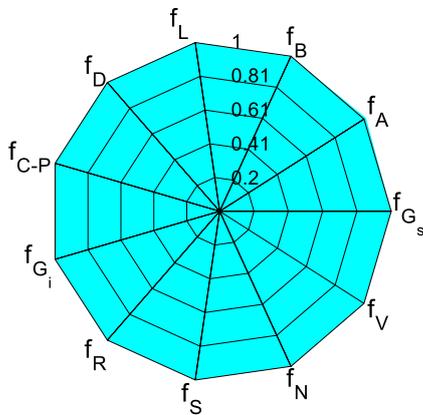
На фиг. 4 и фиг. 5 точката „Салуквадзе-оптимум“ е означена със символа “■”, а точките с ранг 5, 4, ..., 1 – съответно с “●, ▲, ►, ◄, ◆”.



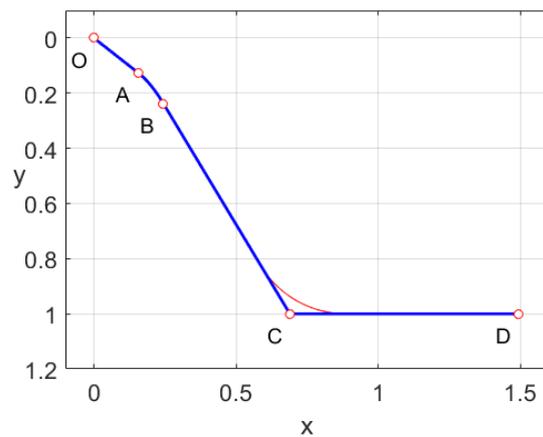
Фиг. 4. Ранжирани точки в  $\mu$ -пространството



Фиг. 5. Ранжирани точки в областта  $\mathbf{D}$



Фиг. 6. Диаграма на компонентите на вектора  $\mathbf{f}^{S^o}$



Фиг. 7. Салуквадзе-оптимален надлъжен профил

Диаграмата от фиг. 6 илюстрира достигнатите нормирани хармонично съгласувани компромисни нива на избраните равноценни частни критерии.

Надлъжният профил на синтезирания Салуквадзе-оптимален гравитационен улей с възможно закръгление на стъпаловидния преход в точка  $C$  с радиус  $r = 0.5$  m е показан на фиг. 7.

Резултатите от решаването на разгледаната задача за многокритериален синтез на надлъжния профил на гравитационен улей показват, че търсеното механично съвършенство се постига при максимално приближаване на движението на точката  $M$  до естествено свободно движение, което е осъществимо, ако линията  $OABC$  се материализира като удържача. При неудържача линия удовлетворяването на ограничението  $N(T) > 0$  и на специфичните за транспортния процес допълнителни функционални и технологични изисквания предопределят граничните възможности за оптимален синтез.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Представените изследвания и участието в настоящата научна конференция са осъществени с финансовата подкрепа на Фонд научни изследвания към Русенски университет «Ангел Кънчев» по договор No 2020 – МТФ – 02 „СЪЗДАВАНЕ НА ОПТИМИЗАЦИОННИ АЛГОРИТМИ ЗА МЕХАНИЧНИ, ТЕРМИЧНИ И ТЕРМОМЕХАНИЧНИ ЧИСЛЕНИ МОДЕЛИ“.

## REFERENCES

Vitliemov, V.G. (2019). Formulating New From Existing Tasks in Mechanics. Ruse: Academic Press of Ruse University. (**Оригинално заглавие:** Витлиемов, В.Г., 2019. Формулирование новых из поставленных задач по Механике. Русе: Академическое издательство Русенского университета).

Vitliemov, V.G., Ivanov I.V. Multi-objective parametric synthesis of discrete mechanical systems. Mechanics of machines, V. 25 (117), 2017, No. 1, pp. 78-82, ISSN 0861-9727 (**Оригинално заглавие:** Витлиемов, В.Г., Иванов И.В. Многокритериален параметричен синтез на дискретни механични системи. Механика на машините, Т. 25 (117), 2017, № 1, стр. 78-82, ISSN 0861-9727).

Gorskii, B.E. (1995). Dynamic Improvement of Mechanical Systems. 3rd ed., Kiev: Vipol. (**Оригинално заглавие:** Горский, Б.Е., 1995. Динамическое совершенствование механических систем. 3-е изд., Киев: Випол).

Guts, V.S., & Koval', O.A. (2016). Design of gravitational attractions. Technological audit and production reserves, 1/1 (21), 12-17. (**Оригинално заглавие:** Гуць, В.С., Коваль, О.А., 2016. Проектування гравітаційних атракціонів. Технологический одит и резервы производства, № 1/1(27), 12-17).

Jordanov, J.T., & Vitliemov, V.G. (2013). Optimization with MATLAB: Pragmatical Approach. Ruse: “Angel Kanchev” University Press. (**Оригинално заглавие:** Йорданов, Й.Т., Витлиемов, В.Г., 2013. Оптимизация с MATLAB. Прагматичен подход. Русе: Университетско издателство „Ангел Кънчев“).

Sobol', I.M., Statnikov, R.B. (2006). Selecting Optimal Parameters in Multicriteria Problems. 2nd ed., Moskow: Drofa. (**Оригинално заглавие:** Соболев, И.М., Статников, Р.Б., 2006. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. 2-е изд., Москва: Дрофа).

Tsonev, S., Vitliemov, V.G., & Koev, P.A. (2004). Optimization Methods. 2nd ed., Ruse: University of Ruse. (**Оригинално заглавие:** Цонев, С., Витлиемов, В.Г., Коев, П.А., 2004. Методи за оптимизация. 2-ро изд., Русе: Русенски университет).

Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization*. Berlin: Springer.

Salukvadze, M.E. (2012). *Vector-Valued Optimization Problems in Optimal Control Theory*. 2nd ed., New York: Academic Press.