FRI-ONLINE-1-CCT2-03

MODELING OF QUEUING SYSTEMS TO DETERMINE BASIC OPERATING PARAMETERS [15]

Assist. Prof. Chavdar Kostadinov, PhD
Department of Communication and information systems,
"G. S. Rakovski" National Defence College – Sofia
Phone: +359 292 26596
E-mail: ch.kostadinov@rndc.bg

Assist. Kristina Krumova
Department of Communication and information systems,
"G. S. Rakovski" National Defence College – Sofia
Phone: +359 292 26660
E-mail: k.krumova@rndc.bg

Assoc. Prof. Veselina Aleksandrova, PhD
Department of Communication and information systems,
"G. S. Rakovski" National Defence College – Sofia
Phone: +359 292 26660
E-mail: v.gagamova@rndc.bg

Assoc. Prof. Ivan Hristozov, PhD
Department of Communication and information systems,
"G. S. Rakovski" National Defence College – Sofia
Phone: +359 292 26595
E-mail: ihristoz@rndc.bg

Abstract: *Queuing systems (QS) with failures are one of more a typical type of QS used to describe and study communication and information systems. Due to their importance for the functioning of such systems, the dependencies are summarized to determine their main parameters. An example of such a system is considered and an analysis of the work is made and sample recommendations are given for better operation of the system.*

Keywords: *modelling, queuing systems, queuing systems with failures.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Съществуват множество видове сложни системи, създадени да работят, за да подпомагат дейностите на човека (Kostadinov, Ch., Peeva I., 2020). Две са основните групи системи, за чието описание се използва най-вече Теория на масовото обслужване – производствени (Kostadinov, Ch., Peeva I., 2017) и комуникационни. И двете сложни системи се характеризират с образуването на опашки при обслужването на постъпващите заявки (Vencel, E. S., 1972).

Тук ще стане дума за случаите когато заявките получават отказ за обслужване (Kostadinov, Ch., Peeva I., 2019). Той може да бъде породен от различни източници, но независимо от вида на системата или източника това в крайна сметка са нежелани ситуации, които трябва да се ограничават максимално.

[15] Докладът е представен на on-line сесия на 13 ноември 2020 с оригинално заглавие на български език: МОДЕЛИРАНЕ НА СИСТЕМИ ЗА МАСОВО ОБСЛУЖВАНЕ С „ОТКАЗИ" ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОСНОВНИ ЕКСПЛОАТАЦИОННИ ПАРАМЕТРИ

ИЗЛОЖЕНИЕ

Моделиране на СМО с откази

Системите за масово обслужване могат да бъдат с откази, с опашки и комбинирани според начина на действие на постъпващата заявка за обслужване (Kleinrock L., 1979). СМО с откази (***M/M/n/n***) – опростен модел за определяне на вероятността за отказ P_{OTK} в системи, в които заявките не могат да чакат (липсва буфер или услугата не позволява това) и се губи при заетост на всички обслужващи прибори. Изходни данни – характеристики:

- Безкраен брой независими източници на повиквания ($k = \infty$);

- Експоненциално разпределени интервали между повикванията;

- Заявките постъпват като поток на Поасон с интензивност λ;

- Краен брой обслужващи прибори ($n < \infty$);

- Времето за обслужване е експоненциална случайна величина със средно време τ;

- Системата няма места за чакане ($m = 0$), заявките се губят когато постъпват в момент когато всички обслужващи прибори са заети.

Интензивността на трафика на входа на системата е $a = \lambda\tau$.

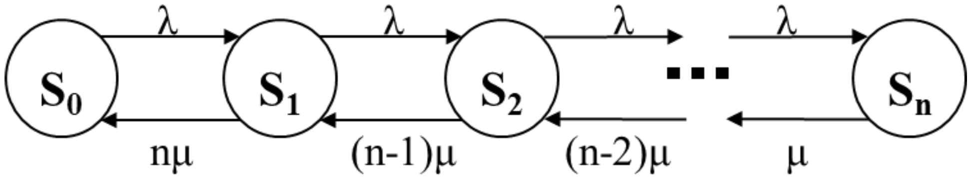
Нека $X(t)$ е броят на заявките, намиращи се в СМО в момента t. Тогава $X(t) = i$ във всеки момент t. Когато интервалът от време е достатъчно малък $(t,\ t + h)$ нова заявка постъпва с вероятност $\lambda h + o(h)$ и става преход $i \rightarrow i + 1$. С вероятност $i\mu h + o(h)$ заявка напуска системата обслужена и става преход $i \rightarrow i - 1$.

Такива процеси се наричат процеси на Марков (Vencel, E. S., 1972) и се изразяват със следния граф на състоянията „гибел-размножаване“ (фиг. 1) и имат краен брой състояния $S = \{0, 1, \ldots , n\}$.

Уравнение на стационарния режим (Local balance equations – LBE) – ако P_i е вероятността в СМО да има i заявки, тогава за стационарен режим на процеса са в сила следните зависимости:

$$\lambda P_i = P_{i+1}(i+1)\mu$$
$$P_{i+1} = \frac{\lambda}{(i+1)\mu}P_i = \frac{a}{(i+1)}P_i$$
$$P_i = \frac{a^i}{i!}P_0$$

За $a = \lambda/\mu$ и всички $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.



Фиг. 1. Граф на състоянията „гибел-размножаване“

В сила е така нареченото „нормиращо условие“ на равновесие:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = P_0 \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!}} \tag{1}$$

След като се замести уравнението за P_0 в LBE за вероятността на i-тото състояние на СМО P_i се получава следното разпределение (разпределение на Поасон):

$$P(X = i) = P_i = \frac{\frac{a^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!}} \tag{2}$$

За всички $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Зависимост (1) е нечувствителна към вида на разпределението на времето за обслужване, стига неговото средно значение да е **1/μ**. Системата може да бъде не M/M/n/n, а M/G/n/n с произволно разпределение на случайната величина „време за обслужване на заявката“.

Основната характеристика на СМО с откази е вероятността за отказ P_{OTK}. Това е вероятността постъпващата на входа на СМО заявка да завари всички n обслужващи прибора заети. Вероятността ВС представлява онази част от постъпващите заявки, която се губи (получава отказ или „заето“). По този начин вероятността P_{OTK} постъпващата заявка да завари всички n канали заети е равна на вероятността в произволен момент от време да бъдат заети n прибора, т.е. СМО да бъде в състояние P_n:

$$P_{OTK} = P_n = \frac{\frac{a^n}{n!}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{j!}} \tag{3}$$

Формулата на Ерланг (3) за отказите в СМО от типа M/M/n/n – формула за блокировките.

Приложението на тези зависимости ще бъде представено в пример 1 – представяне на паралелни телефонни канали като СМО с откази:

• Моделът на Ерланг описва точно работата на n паралелни телефонни канала между телефонни централи във вид на СМО с откази;

• Моделът се характеризира със следните характеристики:

- Заявките са повикванията на абонатите на PBX към градската телефонна мрежа;

- λ – скорост на постъпване на заявките (заявка/ед. време);

- $\tau = 1/\mu$ – средно време за заемане на 1 телефонен канал от 1 повикване към градската телефонна мрежа;

- $\alpha = \lambda/\mu = \lambda\tau$ интензивност на трафика, постъпващ на входа на СМО;

- n – брой паралелни телефонни канали между двете централи.

• Всяко повикване заема 1 канал (ако има свободен) със експоненциално разпределение и средно значение $\tau = 1/\mu$, след което освобождава канала и напуска СМО;

• Повикването се губи с вероятност P_{OTK} (абонатът получава сигнал „заето“ и затваря), ако всички n канала са заети в момента на постъпване на повикването – зависимост (3).

На фиг. 2 е представена графично такава една СМО.

Изследване на многофазни СМО с откази

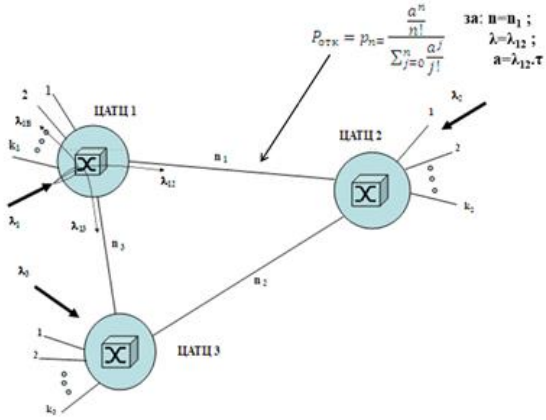
Многофазни СМО са тези, при които всяка заявка се обслужва последователно от няколко прибора, т.е. преминава през няколко фази.

Разглеждаме двуфазна СМО с откази.

• В системата постъпва прост поток от заявки с плътност $\boldsymbol{\lambda}$;

• Времето за обслужване в първата фаза е разпределено по показателния закон с параметър $\boldsymbol{\mu_1}$;

• Времето за обслужване в първата фаза е разпределено по показателния закон с параметър $\boldsymbol{\mu_2}$;



Фиг. 2. Паралелни телефонни канали като СМО с откази

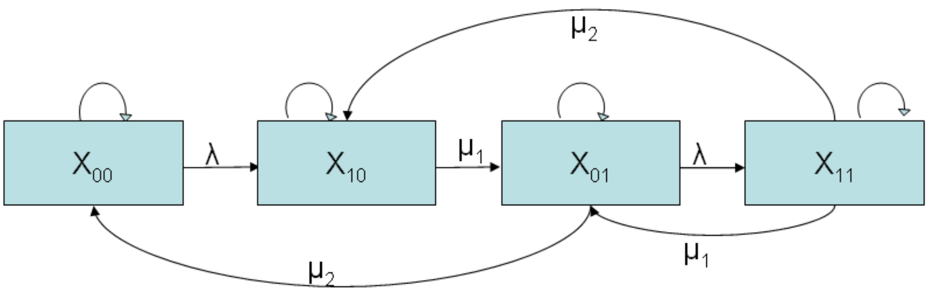
Описание на състоянията на двуфазна система с откази (фиг. 3):

$\boldsymbol{X_{00}(t)}$ – двете фази са свободни, вероятността е $\boldsymbol{P_{00}(t)}$;

$\boldsymbol{X_{10}(t)}$ – първата фаза е заета, втората – свободна, вероятността е $\boldsymbol{P_{10}(t)}$;

$\boldsymbol{X_{01}(t)}$ – първата фаза е свободна, втората – заета, вероятността е $\boldsymbol{P_{01}(t)}$;

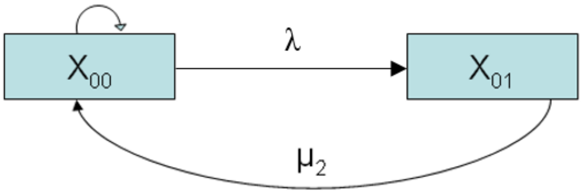
$\boldsymbol{X_{11}(t)}$ – и двете фази са заети, вероятността е $\boldsymbol{P_{11}(t)}$.



Фиг. 3. Граф на състоянията на двуфазна СМО с откази

За намирането на вероятността $\boldsymbol{P_{00}(t)}$ като се използва фиг. 4 може да се каже, че ако се сбъдне едно от двете събития $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$, то системата ще се намира в състояние $\boldsymbol{X_{00}}$, $\boldsymbol{X_{00}=A+B}$. При събитие $\boldsymbol{A}$ – в момента $\boldsymbol{t}$ системата се намира в състояние $\boldsymbol{X_{00}(t)}$ с вероятност $\boldsymbol{P_{00}(t)}$ и за време $\boldsymbol{\Delta t}$ не идва заявка. $\boldsymbol{P(A) = (1-\lambda\Delta t)P_{00}(t)}$.

При събитие $\boldsymbol{B}$ – в момента $\boldsymbol{t}$ системата се намира в състояние $\boldsymbol{X_{01}(t)}$ с вероятност $\boldsymbol{P_{01}(t)}$ и за време $\boldsymbol{\Delta t}$ канала се освобождава. $\boldsymbol{P(B) = \mu_2\Delta t P_{01}(t)}$.



Фиг. 4. Граф на състоянията на първата фаза от двуфазна СМО с откази

По този начин се получава:

$$P_{00}(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)P_{00}(t) + \mu_2 \Delta t P_{01}(t)$$

Като се използва графа на състоянията от фиг. 3, могат да се запишат уравнения за състоянията на системата:

- $\lambda P_{00} = \mu_2 P_{01}$;
- $(\lambda + \mu_2)P_{01} = \mu_1 P_{11} + \mu_1 P_{10}$;
- $\mu_1 P_{10} = \lambda P_{00} + \mu_2 P_{11}$;
- $(\mu_1 + \mu_2)P_{11} = \lambda P_{01}$;

По този начин след известен брой преобразования се получава:

$$P_{00} = \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)}$$

$$P_{10} = \frac{\lambda\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\mu_1+\mu_2)(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)}$$

$$P_{01} = \frac{\lambda\mu_1}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)}$$

$$P_{11} = \frac{\lambda\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)}$$

Критерий за оценка ефективността на двуфазна система с откази е вероятността за обслужване $\boldsymbol{P_{обсл}}$ (4). Тя е равна на отношението на броя на обслужените заявки за единица време от втората фаза към средния брой пристигащи заявки.

$$P_{\text{обсл}} = \frac{\mu_2(P_{01}+P_{11})}{\lambda} = \frac{\mu_1\mu_2(1+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)} \tag{4}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За представеният модел на двуфазна система с откази е определена вероятността за отказ, която се явява най-важният показател за работата й. Качеството на обслужване ще се гарантира при $\boldsymbol{P_{ОТК}}$ от порядъка на 0,01 до 0,001 за телефонната услуга.

REFERENCES

Vencel, E. S., (1972). Research operations, Moskva. Sovetskoe radio. (Оригинално заглавие: Венцель Е. С. 1972. Исследование операции, Москва. Советское радио).

Kleinrock, L., (1979). Queueing System, volume I: Theory, Wiley-Interscience Publication.

Minkova, L. D., (2014). Traditional probability theory, Sofia, University of Sofia (Оригинално заглавие: Минкова Л. Д., 2014. Традиционна теория на вероятностите. София. Софийски университет).

Kostadinov, Ch., Peeva I., (2017). Influence of scenario of maintenance of technological machines in RTM parallel action. Актуальная наука, № 3, ISSN 2587-9022. (Оригинално заглавие: Костадинов, Ч., Пеева, И., 2017. Влияние сценария обслуживания технологических машин в РТМ параллельного действия. Актуальная наука, № 3, ISSN 2587-9022).

Kostadinov, Ch., Peeva I., (2019). Simulation modeling of RTM with parallel structure. Journal “Fundamental Sciences and Applications” of the Technical University – Sofia, Plovdiv branch, Bulgaria, Vol. 25, 2019.

Kostadinov, Ch., Peeva I., (2020). Features of queuing systems with tails. Automation of discrete production engineering, Issue 2, July, 2020, Publishing house of TU-Sofia, ISSN: 2682-9584. (Оригинално заглавие: Костадинов, Ч., Пеева, И., 2020. Особености на системите за масово обслужване с опашки. Автоматизация на дискретното производство, Брой 2, юли, 2020, Издателство на ТУ София, ISSN: 2682-9584).