FRI-ONLINE-1-MIP-01

SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS UNDER BOUNDARY AND INITIAL CONDITIONS VIA LAPLACE TRANSFORM [1]

Assoc. Prof. Julia Chaparova, PhD
Department of Mathematics,
University of Ruse
Phone: 082 888 226
E-mail: jchaparova@uni-ruse.bg

Abstract: *In this work we present the use of Laplace transform toward second order PDEs under boundary and initial conditions in bounded and unbounded domains. The subject is suitable for comprehensive reading by students in Engineering, as well as Applied and Financial mathematics.*

Key words*: Heat equation in 1D and 2D, Wave equation, Laplace transform Initial and boundary conditions*

ВЪВЕДЕНИЕ

Методът на Фурие (методът на разделяне на променливите) представлява мощно средство за решаване на смесени задачи за частни диференциални уравнения. Най-общо при този метод решението се търси като функционален ред по собствените функции на съответна спектрална задача за пространствените променливи със съответни гранични условия, а коефициентите на реда са Фуриеровите коефициенти по тези собствени функции на началните данни. В случай, че спектралната задача притежава непрекъснат спектър обаче, методът на Фурие става неприложим.

Целта на настоящата работа е да демонстрира друг подход за решаване на частни диференциални уравнения с начални и гранични условия, основан на преобразуване на Лаплас по времето. С негова помощ частното диференциално уравнение се преобразува в обикновено диференциално уравнение. Представени са примери за вълново уравнение и уравнение на дифузията в ограничени и неограничени области. Получените решения са визуализирани с помощта на система MATHEMATICA.

Този материал е подходящ за самостоятелна работа за студенти от бакалавърски и магистърски програми в областта на инженерството, приложната и финансова математика.

ПРЕОБРАЗУВАНИЕ НА ЛАПЛАС. СВОЙСТВА. ОБРАТНО ПРЕОБРАЗУВАНИЕ НА ЛАПЛАС. СЪЩНОСТ НА МЕТОДА

За пълнота да припомним дефиницията и някои свойства на преобразуванието на Лаплас, които ще използваме в изложението, За повече информация насочваме читателя към (J. Schiff, 1999).

Нека $f(t)$ е дадена функция, дефинирана за всяко $t>0$. Преобразуванието на Лаплас за $f(t)$ е функцията $F(s)$ на комплексната променлива s, дефинирана с равенството

$$F(s)=\boldsymbol{L}[f]=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,$$

[1] Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 13 ноември 2020 г. в секция Математика информатика и физика с оригинално заглавие на български език: ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПРЕОБРАЗУВАНИЕТО НА ЛАПЛАС КЪМ СМЕСЕНИ ЗАДАЧИ ЗА ЧАСТНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ.

в случай, че несобственият Риманов интеграл вдясно е сходящ поне за някое s_0. В този случай може да се покаже ((G. Doetsch,1970), Теорема 3.4), че несобсвеният интеграл е сходящ за всяко s, такова че $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$.

В горния запис с $\boldsymbol{L}$ е означен операторът на Лаплас, който съпоставя на функцията $f(t)$ функцията $F(s)$. При това казваме, че $F(s)$ е образ на $f(t)$. Ако за някоя функция $F(s)$ на комплексната променлива s е известна функция $f(t)$, така че горното равенство да е в сила, то $f(t)$ наричаме оригинал на $F(s)$ и записваме това с помощта на обратния оператор на Лаплас

$$f(t) = \boldsymbol{L}^{-1}[F(s)].$$

Да отбележим, че оригиналът на дадена функция $F(s)$, ако съществува, не е единствена функция (това е така, понеже Римановият интеграл не зависи от промяната на краен брой стойности на $f(t)$). Но ако се ограничим в класа на непрекъснатите функции, каквито са решенията на диференциалните уравнения обикновено, оригиналът е единствен. Именно, в сила е Теоремата на Лерх (J. Schiff), Теорема 1.23): Различните непрекъснати функции в интервала $[0,\infty)$ имат различни образи.

Достатъчно условие (но не и необходимо) за съществуване на преобразуванието на Лаплас е функцията $f(t)$ да е по части непрекъсната в интервала $[0,\infty)$ и да е с експоненциален ръст.

Казваме, че $f(t)$ е по части непрекъсната в $[0,\infty)$, ако съществува $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ и $f(t)$ е непрекъсната във всеки краен подинтервал на $[0,\infty)$, евенуално с изключение на краен брой точки, в които функцията има крайни лява и дясна граница. По дефиниция $f(t)$ има експоненциален ръст, ако съществуват константи $M > 0$, α и $t_0 \geq 0$, такива че $|f(t)| \leq M\, e^{\alpha t}$ за всяко $t \geq t_0$.

Преобразуванието на Лаплас, както и обратното преобразувание на Лаплас, притежават редица свойства, сред които **линейно свойство**:

$$\boldsymbol{L}[c_1 f + c_2 g] = c_1 \boldsymbol{L}[f] + c_2 \boldsymbol{L}[g], \quad \boldsymbol{L}^{-1}[c_1 F + c_2 G] = c_1 \boldsymbol{L}^{-1}[F] + c_2 \boldsymbol{L}^{-1}[G]$$

за произволни константи c_1, c_2,

стига изразите вдясно да съществуват. При диференциалните уравнения се прилага свойството **диференциране на оригинал:** Нека $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ са непрекъснати функции в интервала $[0,\infty)$ и са с експоненциален ръст, а $f^{(n)}(t)$ е по части непрекъсната в $[0,\infty)$. Тогава

$$\boldsymbol{L}[f^{(n)}] = s^n \boldsymbol{L}[f] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \qquad (1)$$

Най-общо методът за решаване на частни диференциални уравнения чрез преобразуванието на Лаплас се състои в следното: Нека неизвестната функция в диференциалното уравнение е $u(x,t)$, където x е пространствената променлива, а $t \geq 0$ е времето. Означаваме с $U(x,s)$ преобразуванието на Лаплас на $u(x,t)$ по времето, т.е.

$$U(x,s) = \boldsymbol{L}[u] = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)dt\,.$$

Тук x играе ролята на параметър. От равномерната сходимост на преобразуванието на Лаплас (J. Schiff, 1999, стр. 20) следва, че производните и границите минават под знака на интеграла:

$$\lim_{x\to x_0} U(x,s) = \lim_{x\to x_0} \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)dt = \int_0^\infty e^{-st} u(x_0,t)dt = U(x_0,s)\,,$$

$$\boldsymbol{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty e^{-st} u(x,t)dt\right) = U_x(x,s)\,,$$

и по същия начин

$$\boldsymbol{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = U_{xx}(x,s)\,. \tag{2}$$

За производните по времето използваме (1):

$$\boldsymbol{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = sU(x,s) - u(x,0)\,,\quad \boldsymbol{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = s^2U(x,s) - s\,u(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\,. \tag{3}$$

Забележете, че началните условия участват в самото преобразувание на Лаплас чрез горните равенства.

С оператора на Лаплас преобразуваме лявата и дясната страна на даденото частно диференциално уравнение. Така получаваме преобразувано уравнение, което е обикновено диференциално уравнение по отношение на $U(x,s)$ като функция на променливата x. В него $s > 0$ играе ролята на параметър. Намираме общото му решение. За определяне на произволните „константи”, зависещи от s, използваме преобразуванието на граничните условия. Накрая извършваме обратно преобразувание на Лаплас върху $U(x,s)$, считайки отново x за параметър, и това е търсеното решение $u(x,t)$.

Начините за намиране обратно преобразувание на Лаплас включват разлагане на дробно-рационална функция в сума от елементарни дроби, свойствата на правото и обратно преобразувание и използване на стандартни таблици на образи и оригинали. За някои функции обаче тези начини не са достатъчни за намиране на оригинала. Тогава се използва експлицитна формула на обратния оператор на Лаплас в комплексната равнина и теоремата за резидуумите. По този начин може да се покаже,че (J. Schiff,1999), формула (4.27)

$$\boldsymbol{L}^{-1}\left[\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right] = \mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right),\quad a > 0\,. \tag{4}$$

Тук функцията $\mathrm{erfc}\,(\mathrm{x})$ се дефинира с равенството

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

и се нарича допълнителна функция на грешката.

По-нататък продължаваме с примери, илюстриращи описания метод. За повече информация относно частните диференциални уравнения насочваме читателя към (Stavroulakis I., S. Tersian, 2004). Получените решения са визуализирани с помощта на система MATHEMATICA, подробно ръководство за която може да се намери в (Wolfram S, 2003).

СМЕСЕНА ЗАДАЧА ЗА ВЪЛНОВО УРАВНЕНИЕ

Да се реши задачата

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{3\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases} \tag{5}$$

където c е положителна константа.

Решение. Означаваме с $U(x,s)$ преобразуванието на Лаплас по времето на неизвестната функция $u(x,t)$. Преобразуваме с оператора на Лаплас лявата и дясната страна на уравнението. От (2) и (3) получаваме

$$\boldsymbol{L}[u_{tt}] = s^2 U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0) = s^2 U(x,s) - s\sin\frac{3\pi x}{l} \ ,$$

$$\boldsymbol{L}[u_{xx}] = U_{xx}(x,s).$$

Тогава преобразуваното уравнение е

$$c^2 U'' - s^2 U = -s\sin\frac{3\pi x}{l} \qquad (s > 0, \quad '' = \frac{d^2}{dx^2}).$$

Общото му решение се дава с

$$U(x,s) = c_1(s) e^{\frac{s}{c}x} + c_2(s) e^{-\frac{s}{c}x} + \eta(x,s),$$

където частното решение $\eta(x,s)$ има вида

$$\eta(x,s) = A(s)\sin\frac{3\pi x}{l} + B(s)\cos\frac{3\pi x}{l}.$$

По метода на неопределените коефициенти намираме

$$A(s) = \frac{s}{s^2 + \dfrac{9c^2\pi^2}{l^2}}, \quad B(s) = 0,$$

следователно

$$U(x,s) = c_1(s)e^{\frac{s}{c}x} + c_2(s)e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{s}{s^2 + \frac{9c^2\pi^2}{l^2}} \sin\frac{3\pi x}{l}.$$

За да определим неизвестните $c_1(s)$ и $c_2(s)$ използваме преобразуванието на граничните условия. В случая

$$U(0,s) = \boldsymbol{L}[u(0,t)] = 0, \quad U(l,s) = \boldsymbol{L}[u(l,t)] = 0.$$

По този начин стигаме до линейната система

$$\left| \begin{array}{l} c_1(s) + c_2(s) = 0 \\ c_1(s)e^{\frac{s}{c}l} + c_2(s)e^{-\frac{s}{c}l} = 0, \end{array} \right.$$

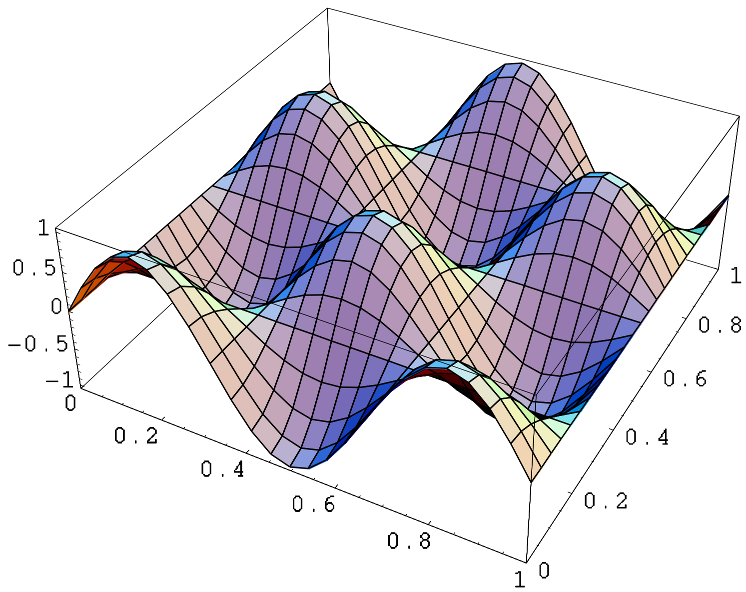
на която детерминантата от коефициентите пред неизвестните е различна от 0. Следователно $c_1(s) = c_2(s) = 0$ за всяко $s > 0$ и решението на преобразуваната задача е

$$U(x,s) = \frac{s}{s^2 + \frac{9c^2\pi^2}{l^2}} \sin\frac{3\pi x}{l}.$$

Накрая извършваме обратно преобразувание на Лаплас по s и намираме решението

$$u(x,t) = L^{-1}[U(x,s)] = \sin\frac{3\pi x}{l} L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \frac{9c^2\pi^2}{l^2}}\right] = \sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3c\pi t}{l}.$$

Графика на решението е дадена на Фиг. 1.



Фиг. 1 Решението на задача (5) при $c = l = 1$

Забележка. Тази задача може да се реши и по метода на Фурие.

СМЕСЕНА ЗАДАЧА ЗА ЕДНОМЕРНО УРАВНЕНИЕ НА ДИФУЗИЯТА

За дадени константи $k > 0$ и c_0 решете задачата

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad x > 0, \\ u(0,t) = c_0, \quad u(x \to \infty, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Решение. Както в предишния пример, означаваме с $U(x,s)$ преобразуването на Лаплас по времето на неизвестната функция $u(x,t)$. Преобразуваме лявата и дясната страна на уравнението. От (2) и (3) получаваме

$$\boldsymbol{L}[u_t] = sU(x,s) - u(x,0) = sU(x,s) \ , \quad \boldsymbol{L}[u_{xx}] = U_{xx}(x,s) .$$

Така стигаме до преобразуваното уравнение

$$kU'' - sU = 0 \qquad (s > 0, \quad '' = \frac{d^2}{dx^2}),$$

чието общо решение е

$$U(x,s) = c_1(s) e^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} + c_2(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} .$$

За определяне на $c_1(s)$ и $c_2(s)$ използваме преобразуванието на Лаплас на граничните условия. Имаме

$$U(0,s) = \boldsymbol{L}[u(0,t)] = \boldsymbol{L}[c_0] = \frac{c_0}{s}, \quad U(x \to \infty, s) = \boldsymbol{L}[u(x \to \infty, t)] = 0 .$$

От първото равенство при $x = 0$ получаваме

$$c_1(s) + c_2(s) = \frac{c_0}{s} ,$$

а от второто равенство при $x \to \infty$ стигаме до $c_1(s) = 0$. Следователно

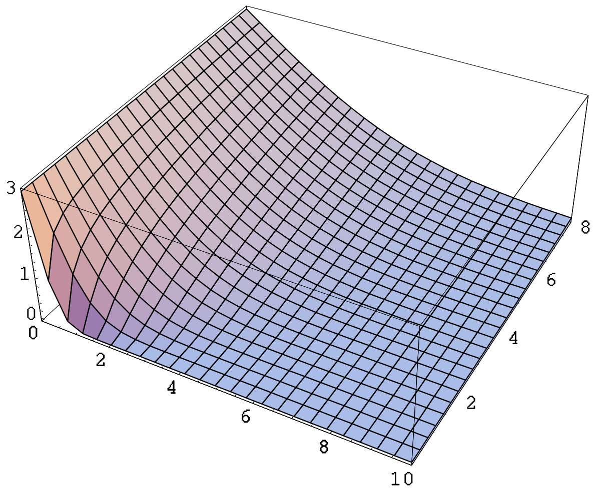
$$U(x,s) = \frac{c_0}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} .$$

Накрая извършваме обратно преобразувание на Лаплас по s и от (4) заключаваме, че търсеното решение е

$$u(x,t) = c_0 \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right).$$

То е изобразено на Фиг. 2.

Copyrights© 2020 ISSN 1311-3321 (print), ISSN 2535-1028 (CD-ROM), ISSN 2603-4123 (on-line)



Фиг.2 Решението на задача (6) при $k = 1, c_0 = 3$

РАДИАЛНО СИМЕТРИЧНИ РЕШЕНИЯ НА ВЪНШНА ЗАДАЧА НА ДИРИХЛЕ ЗА УРАВНЕНИЕ НА ДИФУЗИЯТА

За дадени константи $k > 0$, $R_0 > 0$ и c_0 да се определят радиално симетричните решения на задачата

$$\begin{cases} u_t = k(u_{xx} + u_{yy}), \quad \sqrt{x^2 + y^2} > R_0, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} > R_0, \\ u(x, y, t) = c_0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = R_0, \quad t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty, \quad t > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Решение. Извършваме смяна в полярни координати $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$. Тогава задача (7) се преобразува в

$$\begin{cases} u_t = k \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r} \right), \quad r > R_0, \quad t > 0, \\ u(r, 0) = 0, \quad r > R_0, \\ u(R_0, t) = c_0, \quad u(r \to \infty, t) = 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

по отношение на неизвестната функция $u(r,t)$. Отново прилагаме метода с преобразувание на Лаплас.

Означаваме с $U(r,s)$ преобразуванието на Лаплас по времето на $u(r,t)$. Преобразуваме лявата и дясната страна на уравнението. От (2) и (3) получаваме

$$\boldsymbol{L}[u_t] = sU(r,s) - u(r,0) = sU(r,s) \ , \quad \boldsymbol{L}[u_r] = U_r(r,s).$$

Така стигаме до преобразуваното уравнение

$$sU = k \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) \quad (s > 0)$$

което е обикновено диференциално уравнение за U като функция на r.

Полагаме

$$U(r,s)=\frac{V(r,s)}{r}.$$

По този начин преобразуваното уравнение се записва във вида

$$s\frac{V}{r}=k\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\frac{\partial V}{\partial r}r-V}{r^2}\right)\quad\Leftrightarrow\quad sV=kV''\ \ (s>0,\quad ''=\frac{d^2}{dr^2}),$$

чието общо решение е

$$V(r,s)=c_1(s)e^{\sqrt{\frac{s}{k}}r}+c_2(s)e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}r}.$$

Преобразуваме с оператора на Лаплас граничните условия:

$$U(R_0,s)=L[u(R_0,t)]=\frac{c_0}{s}=\frac{V(R_0,s)}{R_0}\quad\Rightarrow\quad V(R_0,s)=\frac{c_0R_0}{s},$$

$$U(r\to\infty,s)=L[u(r\to\infty,t)]=0=\lim_{r\to\infty}\frac{V(r,s)}{r}.$$

Налагаме тези условия в общото решение $V(r,s)$. От второто условие следва, че $c_1(s)=0$. От първото условие имаме

$$c_2(s)=\frac{c_0R_0}{s}e^{\sqrt{\frac{s}{k}}R_0}.$$

Тогава решението е

$$V(r,s)=\frac{c_0R_0}{s}e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}(r-R_0)}$$

и като се върнем към полагането получаваме решението на преобразуваното уравнение

$$U(r,s)=\frac{V(r,s)}{r}=\frac{c_0R_0}{sr}e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}(r-R_0)}.$$

Накрая чрез обратно преобразуване на Лаплас и формула (4) стигаме до

$$u(r,t)=\frac{c_0R_0}{r}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{r-R_0}{2\sqrt{kt}}\right),\quad r>R_0.$$

REFERENCES

J. Schiff, The Laplace Transform: Theory and Applications, Springer-Verlag, 1999.

G. Doetsch, Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transform, Springer-Verlag, 1970.

Stavroulakis I., S. Tersian. Partial Differential equations. An Introduction with Mathematica and Mapple. World Scientific, Second Edition, 2004.

Wolfram S., *Mathematica*, Addison – Wesley, 1993.