

FRI-ONLINE-1-ERI-06

---

## CIRCLE DESCRIBED AROUND A TRIANGLE - STUDY MATERIAL FOR DISTANCE FORM OF LEARNING<sup>9</sup>

---

**Assist. Prof. Anna Lecheva, PhD**

Department of Mathematics,

University of Ruse

Tel.: 0878 165 411

E-mail: alecheva@uni-ruse.bg

**Assoc. Prof. Veselina Evtimova, PhD**

Department of Mathematics,

University of Ruse

Phone: 0886 267 996

E-mail: v.evtimova@gmail.com

**Eleonora Panayotova, MSc**

Graduated in Methodology of Teaching in Mathematics,

University of Ruse

Phone: 0889 033 557

E-mail: eleonora1\_bg@mail.bg

***Abstract:** This paper discusses the teaching of 8th grade students on the topic of a circle described around a triangle. Theoretical and practical aspects of teaching and expanding the students' knowledge on the topic are presented. This paper acknowledges that geometric knowledge and skills contribute to the general and mathematical development of students by facilitating the development of observation, logical and spatial thinking, creative initiative and creativity.*

*The current curricula in mathematics, published on the website of the Ministry of Education and Science, were used. The choice of the GeoGebra software product for visualization of the theoretical material and the solutions of the proposed tasks is substantiated.*

***Keywords:** E-Learning, Teaching, Geometry of the triangle, Circumscribed circle around triangle*

### ВЪВЕДЕНИЕ

Математиката е наука за количествените, пространствените и времеви отношения на обектите от реалния свят. Геометрията, заедно с аритметиката, е основна част от математиката (Madjarov, A., R. Petrova, 1997). Тя е една от най-старите и дълго развиващи се математически дисциплини. Трудно могат да се изброят разнообразните ѝ приложения в клоновете на математиката, в други науки, в техниката, бита и ежедневието. Това определя мястото на геометрията в училище като съществен компонент от предмета математика (Hristova, G., 2018).

През последните години образованието в България следва тенденциите, налагани от Европейския съюз и свързани с овладяването на някои основни ключови компетентности. Те

---

<sup>9</sup>Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 13 ноември 2020 г. в секция „Образование – изследвания и иновации“ с оригинално заглавие на български език: ОКРЪЖНОСТ, ОПИСАНА ОКОЛО ТРИЪГЪЛНИК - УЧЕБЕН МАТЕРИАЛ ЗА ДИСТАНЦИОННА ФОРМА НА ОБУЧЕНИЕ. Докладът е разработен по проект 2020-ФПНО-03: Изследване на математически и дидактически модели с аналитични и числени методи.

способстват за подобряването на знанията, уменията, способностите и нагласите на учениците и тяхната по-успешна социална реализация (Hristova, G., 2018).

## ИЗЛОЖЕНИЕ

### 1. Някои аспекти в методиката на обучението по математика

При подбора на съдържанието на обучението по геометрия е необходимо да се спазват изискванията за:

- системност, последователност и логическа връзка на знанията;
- да се осигуряват възможности за аналитико-синтетична дейност, сравняване, абстрахиране и обобщаване от страна на учениците;
- да се дават последователно и равномерно (без струпване по много наведнъж) нови, достъпни за учениците знания;
- да се осигурява възможност за практическа дейност на учениците, както и широко участие на въображението при решаване на достъпни задачи и др. (Hristova, G., 2018).

Според ван Хиеле (van Hiele) могат да се отделят пет равнища на мислене в областта на геометрията:

- На **първо равнище** геометричните фигури се разглеждат като единно цяло и се различават само по своята форма, без да се анализират свойствата им.
- На **второто равнище** възприеманите геометрични фигури се анализират, установяват се техните свойства. На това равнище се установява логическа връзка между фигурите, те се описват, без да се дефинират.
- На **третото равнище** се осъществява логическо подреждане на геометричните фигури и на техните свойства. Част от свойствата на фигурите се извеждат чрез разсъждения, но учениците не са в състояние да обхванат дедуктивната система като цяло.
- На **четвъртото равнище** се осмисля значението на дедукцията като начин за построяване и развитие на цялата геометрична теория. Изяснява се същността на аксиомите, определенията, теоремите, логическата структура на доказателствата.
- На **петото равнище** геометричната теория се откъсва от всякаква конкретна интерпретация и се развива като абстрактна дедуктивна система (Hristova, G., 2018).

Част от темите по геометрия в прогимназиалните класове са: **Триъгълник**. (Сбор на ъглите в триъгълник. Външен ъгъл на триъгълник), **Еднакви триъгълници** (Признаци за еднаквост и следствията от тях), **Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30°**, **Окръжност** (Вписана и описана), **Подобни триъгълници** (Признаци за подобие и следствията от тях), **Метрични зависимости в триъгълник** (Метрични зависимости между отсечки в правоъгълен триъгълник. Теорема на Питагор), **Решаване на триъгълник** (Формули за медиани и за ъглополовящи на триъгълник. Формули за лице на триъгълник) (Ministry for Education and Science, Study programs 8.class, Curriculum in mathematics, 2020; Mathematics grade 8, 2020).

В настоящата епидемична обстановка във връзка с COVID-19, част от обучението на учениците се извършва дистанционно. Това налага подготовката и използването на учебни материали, подходящи за синхронно и асинхронно обучение (Panayotova, E., 2020).

В настоящата статия е разгледана темата за **Окръжност, описана около триъгълник**. Използван е достъпният и безплатен програмен продукт GeoGebra, който дава възможност за решаване на задачи по геометрия, алгебра, статистика и аритметика, работа с таблици и графики. GeoGebra позволява да се изпълнят построенията на прости геометрични фигури, многостени, въртящи се тела и техните сечения, построяване на графики на функции и визуализация на тяхната динамика при промяна на параметрите им (Gubskaya I., 2017).

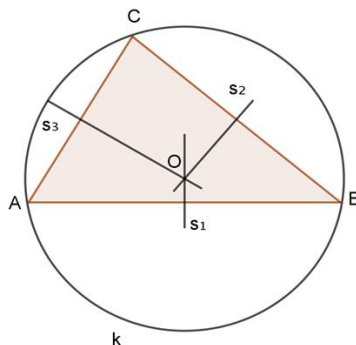
**2. Теоретична постановка на темата *Окръжност, описана около триъгълник***

**Определение:** Симетрала на отсечка се нарича правата, която минава през средата на дадената отсечка и е перпендикулярна на нея.

**Определение:** Пресечната точка на симетралите на страните в един триъгълник е център на описаната около него окръжност.

Прието е тази точка се означава с  $O$ .

**Теорема:** Симетралите на трите страни на всеки триъгълник се пресичат в една точка.



Фиг.1 Център на описаната окръжност

**2. Симетрала на трите страни на триъгълник - Теорема: Симетралите на трите страни на всеки триъгълник се пресичат в една точка.**

Задача 1.

**Дадено:**  $s_1, s_2, s_3$  - симетрала съответно на  $AB, BC, CA$ .

**Да се докаже:**  $s_1, s_2, s_3$  се пресичат в една точка.

**Доказателство:** Нека  $s_1 \cap s_2 = O$

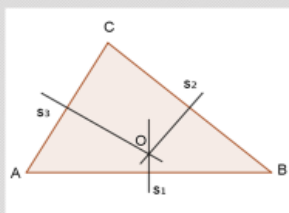
От  $O \in s_1 \Rightarrow OA = OB$

От  $O \in s_2 \Rightarrow OB = OC$

$\Rightarrow OA = OB = OC,$

т.е.  $OA = OC$ . Тогава  $O \in s_3$ .

Доказано е, че  $s_1, s_2, s_3$  се пресичат в точка  $O$ .



Фиг. 2. Симетрала на трите страни на триъгълник

Фиг.2 Доказателство на теоремата

Таблица 1. Местоположение на центъра на описаната окръжност

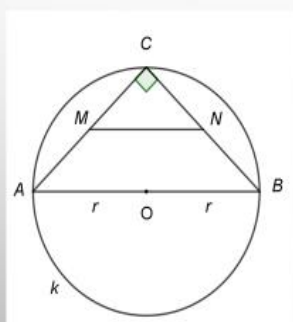
Остроъгълен триъгълник	Правоъгълен Триъгълник	Тъпоъгълен триъгълник

$O$ е вътрешна точка за триъгълника.	$O$ е средата на хипотенузата.	$O$ е външна точка за триъгълника.
--------------------------------------	--------------------------------	------------------------------------

### 3. Практически пример на урок за дистанционна (електронна) форма на обучение

Разработена е презентация на урок за затвърждаване на знания по темата *Окръжност, описана около триъгълник*. На следващите Фиг.3, Фиг.4, Фиг.5, Фиг.6 и Фиг. 7 са представени слайдовете на тази презентация. Тя представлява удобно средство за провеждане на дистанционно (електронно) обучение, както в синхронна, така и в асинхронна форма.

#### 1. ОПИСАНА ОКРЪЖНОСТ ОКОЛО ПРАВОЪГЪЛЕН ТРИЪГЪЛНИК.



Фиг. 1

**Задача 1.** Дадена е окръжност  $k$  ( $O$ ;  $r = 7$  cm). Триъгълникът  $\triangle ABC$  ( $\sphericalangle C = 90^\circ$ ) е вписан в окръжността. Точка  $M$  е среда на  $AC$ , а  $N$  е среда на  $BC$ . Намерете дължината на  $MN$ .

**Дадено:**  $\triangle ABC$  – правоъгълен  $\sphericalangle C = 90^\circ$

$M$  - среда на  $AC$   $AM = MC$

$N$  - среда на  $BC$   $BN = NC$

$k$  ( $O$ ;  $r = 7$  cm) – описана окръжност

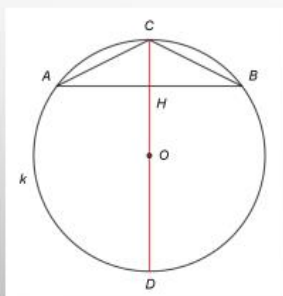
**Да се намери:**  $MN = ?$

**Решение:**  $AM = MC$  и  $BN = NC \Rightarrow MN$  – средна отсечка

$$MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 \text{ cm}$$

Фиг.3

#### 2. ОПИСАНА ОКРЪЖНОСТ ОКОЛО ТЪПОЪГЪЛЕН ТРИЪГЪЛНИК.



Фиг. 2

**Задача 2.** Бедрото на равнобедрен триъгълник е  $a$  cm, а ъгълът между бедрата му е  $120^\circ$  (фиг. 1). Намерете диаметъра на описаната окръжност.

**Дадено:**  $\triangle ABC$ ,  $AC = BC = a$ ,  $\sphericalangle C = 120^\circ$ ,

$k$  – описана окръжност

**Да се намери:**  $d = 2r$  на описаната окръжност  $k$

**Решение:** От  $AC = BC = a$

$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$ . Тогава диаметърът  $CD \perp AB$ , т.е.  $CH$  е височина към основата в равнобедрения  $\triangle ABC$

$\Rightarrow CH$  е ъглополовяща при върха  $C$ , т.е.  $\sphericalangle HCB = 60^\circ$ .

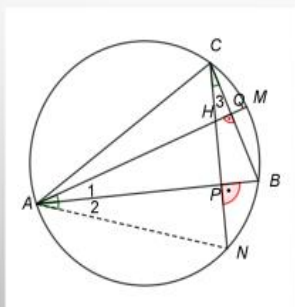
Разглежда се  $\triangle OCB$ . От  $OC = OB = r$  и  $\sphericalangle C = 60^\circ$

$\Rightarrow$  триъгълникът е равностранен, т.е.  $OC = CB = a$ .

Тогава  $CD = 2a$ .

Фиг.4

### 3. ОПИСАНА ОКРЪЖНОСТ ОКОЛО ОСТРОЪГЪЛЕН ТРИЪГЪЛНИК.



Фиг. 3

**Задача 3.** Точките  $M$  и  $N$  лежат на окръжност, описана около остроъгълния  $\triangle ABC$ , така че  $AM \perp BC$  и  $CN \perp AB$ . Ако  $CN$  пресича  $AM$  и  $AB$  съответно в точките  $H$  и  $P$ , докажете, че: а)  $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BAN$ ; б)  $PH = PN$ .

**Дадено:**  $\triangle ABC$  - остроъгълен

$k$  – описана окръжност

$AM \perp BC$ ,  $AM \cap CN = H$ ,

$CN \perp AB$ ,  $CN \cap AB = P$

**Да се докаже:**

а)  $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BAN$

б)  $PH = PN$

Фиг.5

Доказателство:

а) В  $\triangle ABQ$   $\sphericalangle 1 = 90^\circ - \sphericalangle B$

В  $\triangle CBP$   $\sphericalangle 3 = 90^\circ - \sphericalangle B$

$\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 \Rightarrow \widehat{MB} = \widehat{NB}$  (1) (вписани ъгли)

Тогава от (1)  $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$   $\sphericalangle 1 = \frac{1}{2} \widehat{MB}$   $\sphericalangle 2 = \frac{1}{2} \widehat{NB} = \frac{1}{2} \widehat{BM}$

т.е.  $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BAN$

б) Разглеждат се  $\triangle APH$  и  $\triangle APN$

1)  $AP$  – обща

2)  $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$  (от условие а))

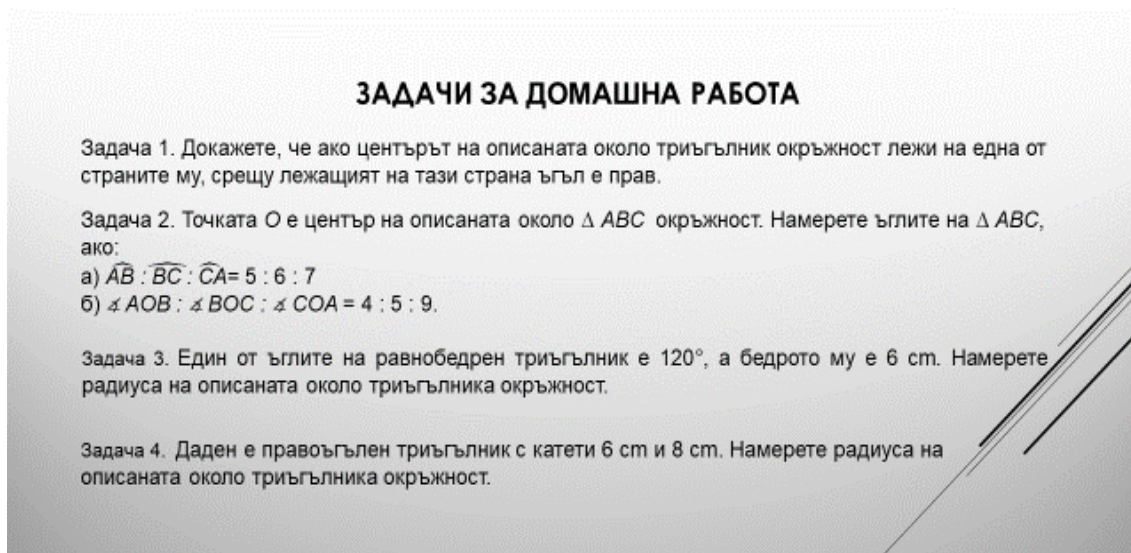
3)  $\sphericalangle P = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle APH \cong \triangle APN$  (по II признак)

$\Rightarrow PH = PN$

Фиг.6





Фиг.7

## ИЗВОДИ

Настоящата статия има образователна и практическа насоченост. Подходяща е за въвеждане на нови знания и за затвърждаване на знанията и уменията на учениците по разглежданата тема.

Представената презентация може да се използва в различни форми на обучение: традиционно, дистанционно – синхронно и асинхронно (Panayotova, E., 2020).

## REFERENCES

- Gubskaya I., 2017, Using GeoGebra in math lessons, <https://docplayer.ru/81722469-Primenenie-geogebra-na-urokah-matematiki.html>, (**Оригинално заглавие:** Губская Ирина, (2017), Применение GeoGebra на уроках математики).
- Hristova, G., 2018, Variant model for teaching geometry for 9-10 year students, [file:///C:/Users/Nora/Downloads/Avtoreferat\\_G.Hristova.pdf](file:///C:/Users/Nora/Downloads/Avtoreferat_G.Hristova.pdf), (**Оригинално заглавие:** Христова Г., Вариативен модел за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици, 2018).
- Madjarov, A., R. Petrova, 1997, Methodology of teaching mathematics in primary school, Axios press, Shumen, (**Оригинално заглавие:** Маджаров, А., Р. Петрова, Методика на обучението по математика в началните класове, изд. Аксиос, Шумен, 1997).
- Mathematics grade 8, 2020, [file:///C:/Users/Nora/Downloads/Matematika\\_8\\_klas\\_E\\_1.pdf](file:///C:/Users/Nora/Downloads/Matematika_8_klas_E_1.pdf), (**Оригинално заглавие:** Математика 8 клас, юни 2020).
- Ministry for Education and Science, Study programs 8.class, Curriculum in mathematics, 2020, <https://www.mon.bg/bg/1999>, (**Оригинално заглавие:** Министерство на образоването и науката, Учебни програми 8 клас, УП Математика, юни 2020).
- Panayotova, E., 2020, A. Lechva, V. Evtimova - scientific supervisors, Geometry of the triangle, Diploma project for master's degree, Methodology of teaching mathematics, University of Ruse "A. Kanchev", (**Оригинално заглавие:** Панайотова Е., (2020), А. Лечева, В. Евтимова - научни ръководители. Геометрия на триъгълника, Дипломен проект за ОКС магистър, MOM, Русе, РУ "Ангел Кънчев")