FRI-ONLINE-1-ERI-01

PROPEDEVTICS OF THE CONCEPT OF FUNCTION IN THE MATHEMATICS SCHOOL COURSE[1]

Pr. Assist. Prof. Desislava Georgieva, PhD
Department of Algebra and Geometry
Faculty of Mathematics and Informatics
St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo
Tel: +359 887 244 498
E-mail: d.georgieva@ts.uni-vt.bg

Abstract: *Functional dependencies are used in various fields of human activity and to a large extent in science. That is why it is important long lasting competencies related to the concept of function to be built. Since this concept is abstract and complex for learners, a multifaceted early propaedeutic is needed, starting in early primary school grades. The aim of this preliminary/preparatory learning is assimilation the following pieces of knowledge: finding a correspondence between the elements of two sets; tracking the change in the result of the operation when changing one of its components; filling in tables; introduction of letter symbolism; determination of the permissible values of a number indicated by a letter. The junior high school teaching course includes formulas for finding the perimeter and area of studied geometric figures; interpretation of scatter and line diagram; word problems using dependencies between distance, speed, time, price, quantity, total value, etc.; introduction of a coordinate system in the plane; the study of rights and inverse proportionality. A mathematical problem for high school course is presented in order to engage students in active research focused on introducing the concepts of constant quantity, variable quantity and domain of variable quantity change, immediately before studying the basic concept – function. An understandable definition of the term function is proposed.*

Keywords: *propaedeutic, definition of function, change of result, permissible values, variable value, domain of change.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Функционалните зависимости намират приложение в транспорта, архитектурата, машиностроенето, авиацията, електротехниката, земеделието, химията, биофизичните процеси в човешкото тяло, статистиката и редица др. Те се използват при изследване и решаване на различни задачи. В различни области на науката математика се изследват функции на една, две или n променливи, решават се уравнения, в които неизвестните са функции, затова училищния курс не може да бъде лишен от изучаването на това понятие.

Поради това, че понятието *функция* и свързаните с него понятия са сложни и до голяма степен абстрактни за обучаваните, е необходима качествена и дългосрочна пропедевтика. Тази предварителна подготовка, състояща се от натрупване на знания и представи в съзнанието на подрастващите, е добре да започне още от началното училище и да продължи до момента на въвеждане на тези понятия.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Дефиниране на понятието функция

Съществуват сведения, че идеята за функция е позната още от древен Вавилон. В най-близко до съвременното му разбиране терминът *функция* е въведен в математиката от Лайбниц и доуточнен от Бернули и Ойлер през XVIII век. Това понятие се появява в края на XIX век в учебните програми и в учебниците на различни страни. В българските учебници присъства от 1912 г.

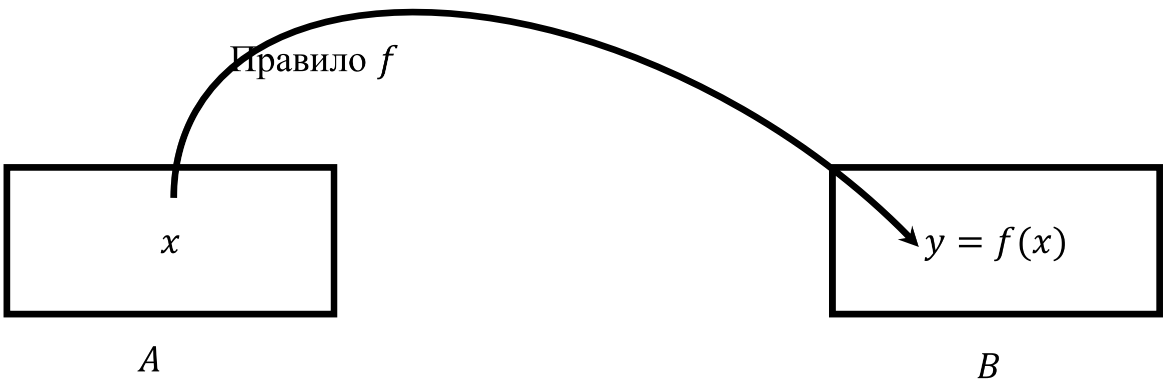
[1] Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 29 октомври 2021 г. в секция „Образование – изследвания и иновации“ с оригинално заглавие на български език: ПРОПЕДЕВТИКА НА ПОНЯТИЕТО ФУНКЦИЯ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА.

С цел откриване на полезни идеи и средства за успешно формулиране, от дидактическа гледна точка, на понятието *функция* М. Върбанова и Ив. Ганчев (Varbanova, M. & Ganchev, I., 2002) предлагат различни дефиниции на това понятие.

В един от съвременните учебници урокът започва с доста странно обяснение за понятието „Функция е връзка между елементи, които служат за вход, и множество от елементи, които са изход, така че на всеки вход съответства точно един изход.“, което не е по-лесно за разбиране от учениците.

Доста по-успешно е въведено това понятие в друг учебник по математика за 9 клас (Paskalev, et al., 2018) където първо се дефинира понятието *функционална зависимост*, като изменението на една величина зависи от изменението на друга величина. Второ, въвежда се понятието *дефиниционно множество* (*дефиниционна област*), като множеството от стойности, които приема независимата променлива (аргументът) при дадени условия. След което, е записано следното определение: „Нека една променлива величина x приема за стойности всички числа от едно числово множество Д. Променливата y се нарича функция на променливата x, ако има правило, посредством което на всяка стойност на $x \in$ Д съответства точно една стойност на y“.

Обучаваните са запознати с понятието *множество* от предходните класове, затова с максимално кратка и интуитивно ясна формулировка могат да се въведат две нови понятия и де се избегнат непознати и сложни за учениците термини, като се формулира следното определение: **Когато на всеки елемент $\boldsymbol{x}$ от множеството $\boldsymbol{A}$, по определено правило се съпоставя най-много един елемент $\boldsymbol{y}$ от множеството $\boldsymbol{B}$, казваме, че е зададена *функция* $\boldsymbol{f}$ от $\boldsymbol{A}$ към $\boldsymbol{B}$. Това правило за съпоставяне се нарича *функционална зависимост*. Записва се $\boldsymbol{y = f(x)}$.**



Фиг. 1. Функционална зависимост

Изучаване на понятието функция съгласно държавните образователни стандарти

В настоящата учебна програма по математика за IX клас за общообразователна подготовка (Ministry of Education and Science) е заложено изграждането на ключови компетентности на ученика в следните две области: *Функции* и *Измерване и моделиране*. Съгласно, които се очаква постигането на следните знания, умения и отношения:

- знае понятието числова функция и начини на задаване; понятията линейна и квадратна функция; свойства на линейната и на квадратната функция (монотонност, най-голяма и най-малка стойност); основните тригонометрични функции в интервала $(0^0, 90^0)$;
- умее да построява графики на линейна и квадратна функция;
- пресмята стойности на изучените функции и на аргументите им;
- знае тригонометричните функции (за $30^0, 45^0, 60^0$);
- пресмята стойности на тригонометричните функции при зададен аргумент и на аргумента при зададена стойност на функцията;
- моделира с квадратна функция.

В областта на компетентност *Функции. Измерване* в учебната програма за X клас са записани следните очаквани резултати:

- знае тригонометрични функции на ъгъл в интервала $[0^0, 180^0]$ и техните графики и свойства;
- умее да намира лице на триъгълник чрез подходяща формула;
- умее да намира лице на повърхнина и обем на права призма, пирамида, цилиндър и конус;
- умее да намира лице на повърхнина на сфера и обем на кълбо;
- може да конструира числови редици по дадено правило;
- знае аритметична и геометрична прогресия и техните свойства;
- решава практически задачи, свързани със сложна лихва.

Учебната програма за XI клас включва:

- знае тригонометрични функции на обобщен ъгъл, техните графики и свойства;
- умее да намира лице на четириъгълник и правилен многоъгълник;
- знае графиките и свойствата на функциите $y = \sqrt{x}, y = x^3, y = \sqrt[3]{x}, y = a^x, y = \log_a x$.

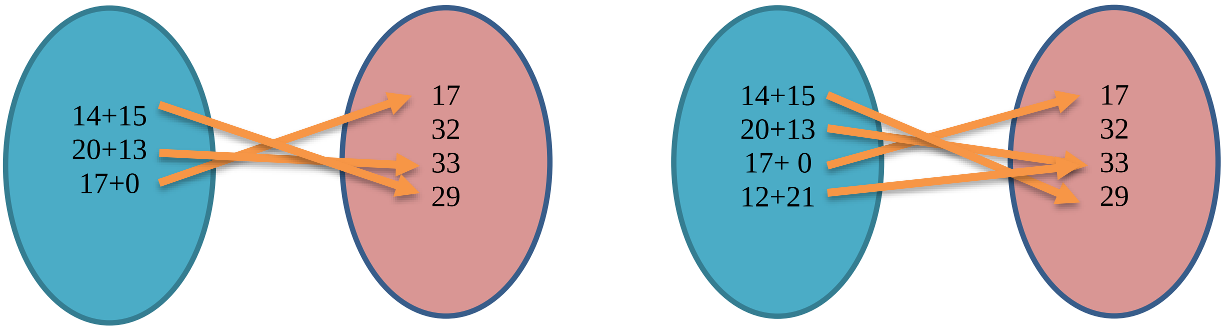
В учебната програма за XII клас в модул *Функции. Измерване* е заложено – използва свойствата на елементарните функции при решаване на екстремални задачи, а в модул *Фигури и тела* – използва знанията си за решаване на екстремални задачи за фигури.

Абстрактността и сложността на предвидените понятия може да бъде намалена и да се осигури възможност за формиране на трайни компетенции, заложени в образователните програми, чрез многокомпонентна подготовка, започваща от началните класове.

Целенасочена ранна пропедевтика на понятието функция и на основните функции, изучавани в училище

Изучаването на понятието *функция* е необходимо да се подготвя още от началния етап на образование чрез целесъобразно подбрани задачи.

Намиране на сбор или разлика, или произведение, или частно, при което на интуитивно ниво се осъзнава, че **на две числа по определен начин се съпоставя друго число** (Mincheva, I., 2010), като се използват крайни множества. Например (фиг. 2.) на дъската/ дисплея са изобразени две множества, като в едното са записани няколко двойки събираеми и учениците трябва да свържат със съответните сборове от другото множество. Добре е да се предлагат задачи и от двата вида, когато броят на елементите на второто множество (мощността на множеството) е по-голям и когато е равен на броя на елементите от първото множество.



Фигура 1. Съответствие между елементите на две множества

След което, е добре учителят да извърши „поглед назад“ по Д. Пойа, като зададе следните въпроси: „За всеки сбор от първото балонче има ли съответно число? Има ли число от второто балонче, което не съответства на нито един сбор? Има ли различни събираеми от първото балонче, на които съответства едно число от второто? Може ли на един сбор да съответстват две числа, например може ли да сложим две стрелки от 14+15 към 17 и към 29? Защо?“.

По този начин се осъществява пропедевтика на *функционална зависимост*, като се набляга на думата *съответства*.

При въвеждане на четирите аритметични операции се проследява изменението на резултата от операцията при изменение на едната компонента, докато другата е фиксирана. Например (табл. 1):

Таблица 1. Изменение на резултата при изменение само на едната компонента

	+ 4
1	
2	
3	

С тази задача се задава неявно функцията $y = x + 4$ с дефиниционна област числата от първата колона. Също е подходящо да се проведе обучаваща беседа, с която се извършва пропедевтика и на *растяща функция*: „Последователни ли са числата в първата колона? Последователни ли са във втората? Кои числа са по-големи, в първата или във втората колона? С колко са по-големи? Всяко следващо число в първата колона е по-голямо от предходното, това изпълнено ли е за числата от втората колона?“.

Въвеждане на буквена символика, чрез задачи, при които едната от компонентите на операцията е фиксирана, а другата е означена с буква, например $a: 5 = ?$ при a равно на $10, 15, 20, 25$ (Varbanova, M., 2013).

При другата разновидност на задачите и двете компоненти са означени с букви (табл. 2):

Таблица 2. Въвеждане на буквена символика

a	6	6	6	6
b	3	5	7	9
$a.b$				

a	3	5	7	9
b	7	7	7	7
$a.b$				

С тази задача (попълване на двете таблици) се задават неявно функцията $y = 6.x$ с дефиниционна област числата от втория ред и функцията $y = x.7$ с дефиниционно множество числата от първия ред. Подготвя се алгебричното задаване на функция. С тази задача е добре да се проведе беседа, развиваща наблюдателността и мисленето и да се извърши пропедевтика на понятието *растяща функция*: „В първата таблица какво забелязвате, какви са числата в първия ред, а във втория? Какво забелязвате за произведението? Кои числа нарастват по-бързо (стават все по-големи), в реда с множителя или в реда с произведението? Сравнете произведенията в двете таблици. В коя таблица на последния ред числата са по-големи? Защо?“. Аналогично може да се извърши пропедевтика на понятието *намаляваща функция*.

Едновременно с това могат да бъдат актуализирани и знанията за четни и нечетни числа „В първата таблица, какви са числата, четни или нечетни на първия, втория и третия ред? А във втората таблица? Какъв извод можем да направим? Когато умножаваме с четно число, в случая с шест, какво произведение се получава, четно или нечетно? Когато умножаваме нечетни числа с нечетно, в случая със 7 какви са произведенията?

В началните класове се решават задачи като следната (Mincheva, I., 2019) в табл. 3:

Таблица 3. Пропедевтика на нарастващи функции

a	2	3	4	5	6	7
$a+3$						
$a\,.3$						

След попълването е добре да се направи дидактическа беседа: „Числата от първия ред са последователни естествени числа. Какво забелязвате за числата от другите два реда, те последователни ли са? За числата от първия ред можем да забележим, че всяко следващо число е по-голямо от предходното. Това валидно ли е и за числата от втори ред? А за числата от трети ред? Когато едното събираемо става все по-голямо (нараства), какъв извод можем да изведем за сбора? Когато единият множител нараства какво можем да заключим за произведението? В кой ред числа нарастват най-бързо? Кои числа са по-големи от втория или от третия ред?“

Следва подобна таблица (табл. 4.) и въпросите: „Какво забелязвате за числата от първия ред? Това валидно ли е и за числата от втори и трети ред?“

Таблица 4. Пропедевтика на намаляващи функции

a	3	6	9	12	15	18
$54-a$						
$54{:}\,a$						

По този начин учениците се подготвят за осмисляне и усвояване на аналитичния начин на задаване на функции. У тях се формира идеята за съпоставяне на едно множество от числа на друго множество от числа.

Определяне на допустимите стойности на число, означено с буква, в дадено равенство, неравенство или израз.

Пример (задача за първи клас): Кои от изучените числа можем да поставим на мястото на буквата a?

$$\text{а) } a+2=5 \text{ б) } a<7 \text{ в) } a-4$$

С тази задача се извършва пропедевтика на понятието *дефиниционно множество*, без да се назовава термина.

Пропедевтика на аналитичното задаване на функция, чрез записване във вид на формула, правилата за намиране на периметър и лице на изучени геометрични фигури. За квадрат лицето и периметъра са функции на страната $P(a)=4.a$; $S(a)=a.a$. Формулите за правоъгълник може да се разглеждат като функция на едната или на другата страна. Когато се разглежда лице на триъгълник, е добре да се разгледат различни триъгълници с равни основи, но с различни височини към основата, т.е. височината се променя, а основата е една и съща, тогава лицето е линейна функция на височината. Ако височината към правата определена от основата е фиксирана, а дължината на отсечката се променя, то лицето $S(a)=\frac{h}{2}.a$ е линейна функция на основата. Аналогично, обиколката на кръга е линейна функция с аргумент радиуса $C(r)=2\pi r$ или диаметъра $C(d)=\pi d$, а лицето на кръга $S(r)=\pi r^2$ е квадратна функция на радиуса на кръга. Обема на телата се разглежда като кубична функция на някой от елементите на тялото.

Пропедевтика в среден курс на обучение

Преди формирането на понятието *функционална зависимост* у учениците трябва да се създаде необходимата понятийна база, т.е. те трябва да имат представа за:

- *зависимостите на величините* като отражение на взаимната връзка и взаимната обусловеност на природните явления;
- *променливи* и *постоянни величини*;
- *множество, елемент на множество, съответствие между еквивалентни множества, дефиниционна област на функция*.

Освен това, учениците трябва да познават аналитичния, табличния и графичния начин за изразяване на връзки между величини. Тези знания трябва да са усвоени от учениците до изучаването на темата „Функция“ в уроците по математика в IX клас, което се осъществява със системата от учебни дейности:

- Четене и интерпретиране на точкова и линейна диаграма в V клас (тези умения се проследяват и на външното оценяване след VII клас).
- Решаване на текстови задачи с контекст от житейската дейност на хората, в които се използват зависимости между път, скорост, време, цена, количество, обща стойност и др. Такъв вид задачи присъстват в голяма част от уроците още от началното училище и техните пропедевтични възможности трябва да бъдат рационално използвани, като се подчертава, кои величини се изменят и кои не се изменят, кои променливи са зависими и кои са независими.
- Въвеждането на координатна система в равнината в VI клас е пропедевтика на графично задаване на функция.
- Изучаването в VI клас на права и обратна пропорционалност и техните графики е подготовка за въвеждане на понятието обратна функция.

Непосредствена подготовка преди изучаването на понятието функция

Подготвителната работа за усвояване на понятието *функция* има за цел да натрупа в съзнанието на обучаваните достатъчен запас от представи, върху които чрез обобщение да се формира основното понятие (Ganchev, et al., 1997). Преди явното въвеждане на понятието *функция*, е добре да се актуализират понятията *постоянна величина*, *променлива величина* и да се въведе понятието *област на изменение на променливата величина*.

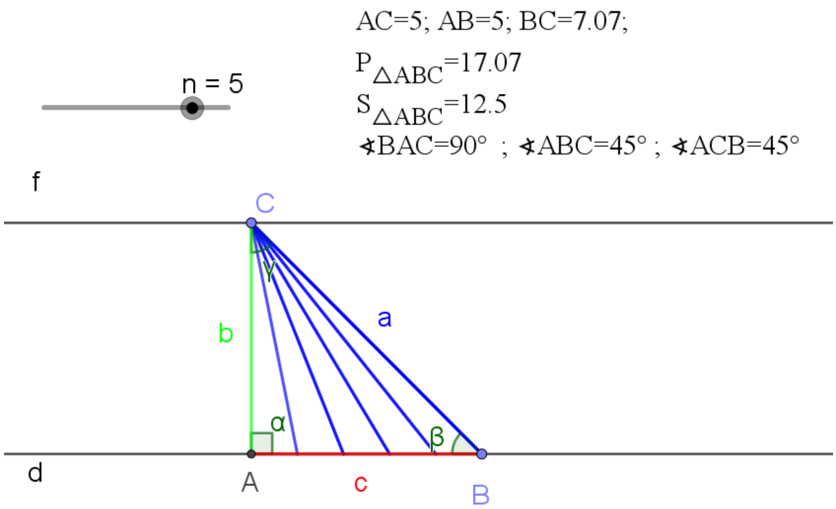
Компетентностният подход предполага изучаването на тези понятия да бъде в ситуация, която ангажира обучаваните с активна изследователска дейност (Vasileva-Ivanova, R., 2014; Galabova, D., 2020). За мотивация може да се покаже снимка на красива архитектурна забележителност с геометрични елементи (Фиг. 3).

Фиг. 2. Мостът Рио – Антирио в Западна Гърция

Добре е да се постави подобна на следната изследователска задача: Дадени са две успоредни прави d и f на разстояние $5\ cm$. Точката $A \in d$, т. $C \in f$, така че отсечката $AC = 5\ cm$. Точката $B \in d$ и $AB = n\ cm$, като n приема последователно стойностите $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Попълнете таблицата (табл. 5.). Проследете кои стойности се променят и кои не.

Чертежът (фиг. 4.) и таблицата (табл. 5.) може да са начертани предварително на дъската или на флипчарт, но още по-добре е да се използват възможностите на GeoGebra или Cabri Geometry или друго приложение за учебни чертежи, с визуализирани стойности на ъглите и динамичен текст за обиколката и лицето.

При изменението на AB остават непроменени височината AC и $\measuredangle BAC$, а всички други величини се променят. Трябва да се подчертае, че променливите величини зависят от изменението на величината n, а самата тя не зависи от друга величина. Може да се въведе понятието *независима величина*, такава е n, а всички останали са *зависими величини*. Изяснява се понятието дефиниционно множество, чрез областта на изменение на дължината на отсечката AB.



Фиг. 3. Математически модел на част от реалния мост

Таблица 5. Попълване на стойности и определяне на постоянни и променливи величини

n	1	2	3	4	5	6
AB						
AC						
BC						
$\measuredangle ABC$						
$\measuredangle BAC$						
$\measuredangle ACB$						
$P_{\Delta ABC}$						
$S_{\Delta ABC}$						

Необходимо е чрез обучаваща беседа да се търсят отговори на различни въпроси: Изменя ли се или не определена величина при дадени условия? От какво зависи изменението ѝ? Оказва ли изменението на една величина изменение на друга? Може ли да се посочи диапазона (границите) на изменението?

По този начин с активна познавателна дейност може да се въвеждат понятията *постоянна* и *променлива величина*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За съвременните младежи е важно да виждат приложимостта на изучаваните знания в науката и реалния живот. Това ги мотивират да вложат усилия и концентрация за осъзнато възприемане на изучаваните знания и формиране на ключовите компетенции. Винаги, когато е възможно, е добре да бъдат поставяни изследователски задачи за активно включване на всички обучавани.

Понятието *функция* намира приложение в различни сфери на човешката дейност, затова е важно изграждането на трайни компетенции в тази област. Трайността е обусловена от активното и осъзнато усвояване на знанията и уменията, които могат да се придобият с многоаспектна ранна и целенасочена пропедевтика на абстрактни понятия.

REFERENCES

Ganchev, I., Portev, L., Baev, B. & Todorova, P. (1997) *Methodology of teaching mathematics 5th - 7th grade*, Plovdiv: Macros 2000, 236 p. ISBN954-561-064-6 (***Оригинално заглавие:*** *Ганчев, И, и др. 1997 Методика на обучението по математика 5. – 7. клас*, Пловдив: „Макрос 2000“).

Galabova, D. (2020) STEM approach in education - a system of innovative approaches for students from „practice to theory“, *Proceedings of the International Scientific Conference „Pedagogical Education - Traditions and Modernity“*, Veliko Tarnovo: AND BI -2020, pp. 29-36 (***Оригинално заглавие:*** Гълъбова, Д., 2020 STEM подход в образованието - система от иновативни подходи за учене от „практиката към теорията“. В: Сборник доклади от Международна научна конференция „Педагогическо образование – традиции и съвременност“, 20.11. 2020, Велико Търново: АНД БИ-2020, с. 29-36).

Mincheva, I. (2010) Methodology of teaching mathematics in primary school. Special part. Selected chapters from the common part. Plovdiv: Astarta, 342 p. ISBN 978-954-350-110-6 (***Оригинално заглавие:*** Минчева, И., 2010 Методика на обучението по математика в началното училище. Специална част. Избрани глави от общата част. Пловдив: Астарта, 342 с.).

Mincheva, I. (2019) Assimilation of the concept of numeric expression in teaching primary school mathematics, Pedagogical almanac of VTU „St. St. Cyril and Methodius”, 27 (1), pp. 54 - 63. Print ISSN1310-358X (***Оригинално заглавие:*** *Минчева, И., 2019, Усвояване на понятието числов израз в обучението по математика в началното училище, Педагогически алманах на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий”, 2019, 27(1), с. 54 – 63. Print ISSN1310-358X, Университетско издателство на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий", Велико Търново*).

Ministry of Education and Science, Curricula and programs https://www.mon.bg/bg/28 (Accessed on 27.07.2021) (***Оригинално заглавие:*** *Министерство на образованието и науката, Учебни планове и програми по класове)*.

Paskalev, G., Alashka, M., Alashka, R. (2018) Mathematics 9. Class, Sofia: Archimedes 2 EOOD, 248 p. (***Оригинално заглавие:*** *Паскалев, Г., Алашка, М., Алашка, Р., 2018, Математика 9. клас, София: Архимед 2 ЕООД, 248 с.*).

Varbanova, M. (2013) *Methodology of teaching mathematics*. Plovdiv: Astarta, 463 p. ISBN 978-954-350-171-7 (***Оригинално заглавие:*** *Върбанова, М., 2013, Методика на обучението по математика. Пловдив: Астарта, 463 с.*).

Varbanova, M. & Ganchev, I. (2002) *Methodology of teaching mathematics – special part*. Plovdiv: Astarta, 196 p. ISBN 954-91070-6-X (***Оригинално заглавие:*** *Върбанова, М. & Ганчев, И., 2002, Методика на обучението по математика – специална част. Пловдив: Астарта*).

Vasileva-Ivanova, R. (2014) The competency approach in teaching mathematics, *Proceedings of university of Ruse*. 53 (6.2), 180-185. URL: http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp14/6.2/6.2-32.pdf (Accessed on 27.07.2021) (***Оригинално заглавие:*** *Василева-Иванова, Р., 2014, Компетентностният подход в обучението по математика, Научни трудове на Русенския университет, 53 (6.2), 180-185*).