FRI-ONLINE-1-ERI-10

USE OF A FIVE-LEVEL MODEL OF TEACHING MATHEMATICS ON THE TOPIC APPLICATION OF THE LIMIT OF A FUNCTION FOR EVALUATING INDETERMINATE FORMS[11]

Assist. Prof. Anna Lecheva, PhD
Department of Mathematics,
University of Ruse
Tel.: +359 82 888
E-mail: alecheva@uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Veselina Evtimova, PhD
Department of Mathematics,
University of Ruse
E-mail: v.evtimova@gmail.com

Abstract: *This article is dedicated to teaching Mathematics on the topic Application of the limit of a function for evaluating indeterminate forms. A five-level model of teaching of mixed type, including passive and active learning methods, proposed by A. Lecheva, is applied. Interactive teaching methods are used, contributing to the development of constructive thinking, ability to express thoughts, ability to clearly and precisely structure knowledge, ability to communicate with the teacher and other students.*

Keywords: *Five-level teaching model, Limit of function, L'Hopital's rule, Indeterminate forms*

ВЪВЕДЕНИЕ

Темата ***Граница на функция*** се изучава само в профилираните паралелки с профил *Математика* в Република България. Дванадесети клас е последният клас от гимназиалния етап на средната образователна степен, като обучението е организирано на две равнища.

Първо равнище на обучение се реализира в рамките на часовете за задължителна подготовка, определени с Наредба №6 [6]. То включва знания и умения, които доизграждат математическата култура на учениците.

Второ равнище се осъществява в рамките на часовете за задължително избираема подготовка (с профилиращ предмет *Математика*). Включеното учебно съдържание надгражда учебното съдържание от второ равнище на XI клас и осигурява завършеност на прокараните съдържателни линии в целия училищен курс. Част от това учебно съдържание може да се изучава в часовете за задължително избираема подготовка (съгласно част Б от учебния план), когато математиката не е профилираща учебна дисциплина.

Съдържанието на програмата е определено на базата на:

- резултатите, които учениците са достигнали след завършване на единадесети клас;
- стандартите, които учениците трябва да постигнат в резултат на завършване на съответното равнище на гимназиалния етап;
- възможностите, които предоставя учебният план;
- връзките на учебния предмет *Математика* с предметите от неговата и другите културно-образователни области [6].

Целите на обучението по математика са следните:

- ✓ Усвояване на елементите от математическия анализ и техните приложения (II равнище).

[11] Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 29 октомври 2021 г. в секция “Образование – изследвания и иновации“ с оригинално заглавие на български език: ИЗПОЛЗВАНЕ НА ПЕТСТЕПЕНЕН МОДЕЛ НА ОБУЧНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ПО ТЕМАТА ПРИЛОЖЕНИЕ НА ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ ЗА РАЗКРИВАНЕ НА НЕОПРЕДЕЛЕНИ ФОРМИ.

- ✓ Обобщаване на знанията за изучените функции, техните свойства и приложения (I равнище).
- ✓ Задълбочаване логическите знания и умения, и усвояване на математическия език.
- ✓ Овладяване на научно-познавателни методи.
- ✓ Приобщаване на математическото образование към европейските стандарти, като се запазват националните традиции [6].

За постигането на поставените цели, в настоящата статия е приложен Петстепенният модел на обучение по Математика, предложен от А. Лечева [3]. Моделът включва пасивни и активни форми на обучение, и е базиран на основните нива в Пирамидата на ученето [2]. Нивата в модела са следните:

1. Основни понятия по темата - определения и теореми;
2. Връзки с изучени теми и/или междупредметни връзки;
3. Технология за решаване на задачи по темата;
4. Придобиване на умения - приложение на теорията;
5. Разширяване на уменията - самостоятелна работа/ работа в екип.

На **първо ниво** преподавателят дава определения на основните понятия по темата, формулира теореми, твърдения и следствия. Това е пасивно ниво, на което обучаваните навлизат в тематиката.

На **второ ниво** преподавателят обвързва новата тема с познати и изучени теми и задава междупредметни връзки, ако има такива. Целта е обучаваните да осмислят по-лесно новите понятия, като ги свържат с нещо познато. Това е пасивно ниво.

На **трето ниво** преподавателят демонстрира методи, показва технологията за решаване на конкретни задачи по темата, използва формули и таблици. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето.

На **четвърто ниво** обучаваните дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от преподавателя. Предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това е активно ниво.

На **пето ниво** обучаваните решават задачи по темата самостоятелно. Преподавателят е пасивен - отговаря на възникнали въпроси, дава насоки и предложения. Получава обратна връзка (рефлексия) чрез анализиране и дискутиране на получените резултати. За обучаваните това ниво е най-ефективното според Пирамидата на ученето. Те прилагат на практика наученото и задълбочават нивото на разбиране по съответната тема [3].

Темата за Приложението на понятието ***Граница на функция за разкриване на неопределени форми*** е разработена, съобразно степените на модела.

ИЗЛОЖЕНИЕ

I. В **първото ниво на модела** е необходимо преподавателят да въведе обучаваните в темата, като даде определения на основните понятия, формулира нужните теореми, твърдения и следствия. Тъй като това е пасивно ниво, на което обучаваните навлизат в тематиката, преподавателят има възможност да използва разнообразни иновативни техники и технологии.

Съобразно един от основните принципи на конструктивизма, който гласи, че учебникът не е основен източник на информация, преподавателят би могъл да поднесе теоретичния материал под формата на презентация, текстов документ в електронен формат, аудио-видео материал, предварително изготвен от него или от външен автор. За целта би могъл да използва иновативни компютърни технологии като мултимедиен проектор, интерактивна дъска, индивидуални работни станции или таблети, ако обучението се провежда в оборудвана компютърна зала; да споделя текстови и/или видео файлове при електронно обучение.

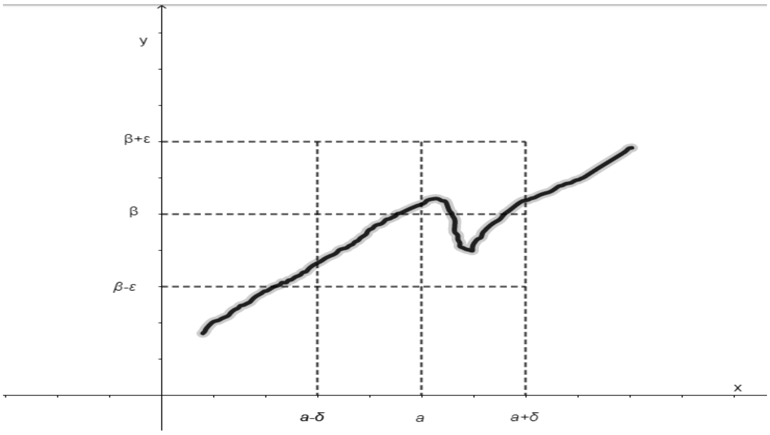
Независимо от конкретната техника на преподаване и използваните технологии, необходимо е обучаваните да получат следните основни теоретични познания по темата [4]:

1. Граница на функция по Хайне и по Коши

Определение 1 *(граница на функция по Хайне).* Числото b се нарича граница (или гранична стойност) на функцията $f(x)$ в точката a (или при $x \to a$), ако за всяка редица от стойности на аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, клоняща към a и състояща се от числа x_n, различни от a, съответната редица от стойности на функцията $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ клони към числото b.

Определение 2 *(граница на функция по Коши).* Числото b се нарича граница (или гранична стойност) на функцията $f(x)$ в точката a (или при $x \to a$), ако за всяко положително число ε съществува такова положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $0 < |x - a| < \delta$, да е изпълнено неравенството $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Граничната стойност на функцията $y = f(x)$ в точката a се означава с $\lim_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.



Фиг. 1. Граница на функция по Коши [4]

Теорема 1.Определенията 1 и 2 за граница на функция по Хайне и по Коши са еквивалентни.

Теорема 2 *(за единственост на граница)*. Ако една функция $f(x)$ има граница при $x \to a$, то тя е единствена.

Теорема 3. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат едно и също дефиниционно множество и съществуват границите $\lim_{x \to a} f(x)$ и $\lim_{x \to a} g(x)$, то съществуват и границите $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)]$ и $\lim_{x \to a} [f(x).g(x)]$, и са изпълнени равенствата:

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x).$$

Теорема 4. Ако съществуват границите $\lim_{x \to a} f(x)$ и $\lim_{x \to a} g(x)$, като $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, то съществува и границата $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, и е изпълнено равенството

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

2. Неопределени форми. Правило на Лопитал [1]

Определение 3. (*Неопределена форма от вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$) Отношението $\frac{f(x)}{g(x)}$ е неопределена форма от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \to a$ (a може да бъде и символа ∞), ако $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$.

Определение 4. (*Неопределена форма от вида* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$) Отношението $\frac{f(x)}{g(x)}$ е неопределена форма от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x \to a$ (a може да бъде и символа ∞), ако $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$.

Разкриването на тези неопределени форми означава да се пресметне, ако съществува, границата $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Теорема 5. (*Първа теорема на Лопитал*) Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са определени и диференцируеми в околност на точката $x = a$, с изключение на точката a. Нека $\lim_{x \to a} f(x) = 0$,

$\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в тази околност. Тогава, ако съществува границата $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и границата $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, и те са равни

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 6.(*Втора теорема на Лопитал*) Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са определени и диференцируеми в околност на точката $x = a$, с изключение на точката a. Нека $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в тази околност. Тогава, ако съществува границата $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и границата $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, и те са равни

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

С използването на **Теорема 5** и **Теорема 6** може да се разкриват неопределени форми от видовете: $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[0.\infty]$, $[1^{\infty}]$, $[\infty^{0}]$, $[0^{0}]$, $[\infty - \infty]$.

II. Във **второто ниво на модела** новата тема се обвързва с познати и изучени теми, и се задават междупредметни връзки, ако има такива. Целта е обучаваните да осмислят по-лесно новите понятия, като ги свързват с нещо познато. Тъй като това е пасивно ниво, удачно е преподавателят да продължи да използва техниките и технологиите, които е прилагал в първото ниво на модела.

Подходящи връзки с изучени теми са:

- Формули за съкратено умножение;
- Полином. Нули на полином. Представяне на полином във вид на произведение от прости множители;
- Квадратно уравнение;
- Алгебрични преобразования с изрази;
- Логаритми. Свойства на логаритмите, свързани с действието антилогаритмуване;
- Числова редица. Граница на редица;
- Функция. Основни елементарни функции;
- Производна на функция. Правила за диференциране и др.

III. В **трето ниво на модела** преподавателят демонстрира методи и показва технологии за решаване на конкретни задачи по темата. Използва формули и таблици на хартиен или електронен носител, с които обучаваните разполагат предварително. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето [2].

Необходимо е демонстрацията да започне с лесни примери, които имат пряка връзка с вече изучени теми.

Пример 1. Функцията $f(x) = x$ има граница a във всяка точка a на безкрайната права.

Решение: За тази функция редицата от стойности на аргумента съвпада със съответната редица от стойности на функцията и ако редицата $\{x_n\}$ клони към a, то и редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към a, т.е. $\lim_{x\to a} f(x) = a$.

Пример 2. Функцията $f(x) = x^n$ има граница a^n за всяка точка a от безкрайната права и за всяко естествено число n.

Решение: В **Пример 1** е показано, че $\lim_{x\to a} x = a$. Съгласно **Теорема 3** се получава, че $\lim_{x\to a} x^n = \lim_{x\to a} x . \lim_{x\to a} x \dots \lim_{x\to a} x = a.a\dots a = a^n$.

Пример 3 (непосредствено намиране на граница). Намерете границата на функцията $f(x) = x^2$ при $x \to 3$.

Решение. $\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$.

Пример 4. Даден е полиномът $P_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$, където $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0$ са константи. Да се докаже, че $\lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$.

Решение: Съгласно **Теорема 3** и **Пример 2**

$$\lim_{x\to a} P_n(x) = \lim_{x\to a}(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) = b_0 + b_1a + b_2a^2 + \cdots + b_na^n = P_n(a)$$
за всяка точка a от безкрайната права.

Следователно, полиномът $P_n(x)$ има граница във всяка точка a от безкрайната права и тя е равна на стойността му $P_n(a)$.

Пример 5. Нека $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ са два произволни полинома от степени съответно n и m. Разглежда се частното $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Да се докаже, че $\lim\limits_{x\to a} R(x) = R(a)$.

Решение: От **Теорема 4** и **Пример 4** следва, че $\lim\limits_{x\to a} R(x) = \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} P_n(x)}{\lim_{x\to a} Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)} = R(a)$ във всяка точка a, която не е корен на полинома $Q_m(x)$. Следователно, рационалната дроб има граница във всяка точка a от безкрайната права, която не е корен на знаменателя ѝ, и тази граница е равна на стойността на рационалната дроб в точката a.

Пример 6. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$.

Решение: Теорема 4 не е непосредствено приложима, тъй като при заместване с граничната стойност на аргумента, стойностите на числителя и знаменателя са равни на нула, т.е. достига се до неопределена форма от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Налага се дадената функция да се преобразува, като се разложат полиномите в числителя и знаменателя на произведение от прости множители: $\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}$. Преобразуваната функция $\frac{x-2}{x-3}$ изпълнява условията на **Теорема 4** за граница на частно и

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to -1} \frac{x-2}{x-3} = \frac{\lim_{x\to -1}(x-2)}{\lim_{x\to -1}(x-3)} = \frac{-1-2}{-1-3} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}.$$

Пример 7. Да се намери границата при неопределена форма от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1,$

б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)'}{(x^n-1)'} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n},$

Пример 8. Да се намери границата при неопределена форма от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}.0 = 0, \text{ където } \alpha > 0,$$

Пример 9. Да се намери границата при неопределена форма от вида $[0.\infty]$:

$$\lim_{x\to 1} \ln x \ln(1-x) = \ln 1 . \ln(1-1) = \ln 1 . \ln 0 = (0.\infty) =$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\frac{1}{\ln x}} . \ln(1-x)\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(\ln(1-x))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x(\ln x)^2}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x(\ln x)^2)'}{(1-x)'}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1.(\ln x)^2 + 2(\ln x)}{-1}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 1}(-(\ln x)^2 - 2\ln x) = -(\ln 1)^2 - 2.(\ln 1) = 0 - 0 = 0.$$

Пример 10. Да се намери границата при неопределена форма от вида $[0^0]$:

$$\lim_{x\to 0} x^x = (0^0) = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to 0}(-x)} = e^0 = 1.$$

Пример 11. Да се намери границата при неопределена форма от вида $[\infty - \infty]$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{cotg\, x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x\sin x - \pi}{2\cos x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + 2x\cos x}{2(-\sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2.1 + 2.\frac{\pi}{2}.0}{-2.1} = -1.$$

IV. В **четвърто ниво на модела** се дава възможност на обучаваните да дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от преподавателя. Те предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това е активно ниво.

Подходящи задачи за работа в час:

Задача 1. Намерете границата $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$.

Решение: Аналогично на **Пример 6**, замества се непосредствено с граничната стойност на аргумента $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{1^3-1}{1^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$ и се достига до неопределена форма от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. След разлагане на полиномите в числителя и знаменателя на произведения от прости множители, се получава

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1^2+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Задача 2. Да се намери границата при неопределена форма от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{\cos 0}{6}=\frac{1}{6},$$

Задача 3. Да се намери границата при неопределена форма от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2\ln x}{x}=\frac{\infty+2\ln\infty}{\infty}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+2\ln x)'}{(x)'}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2.\frac{1}{x}}{1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+2)'}{(x)'}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}=1.$$

Задача 4. Да се намери границата при неопределена форма от вида $[0.\infty]$

$$\lim_{x\to 0}x\operatorname{cotg}2x=\lim_{x\to 0}x.\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)=[0.\infty]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x.(\cos 2x)}{\sin 2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1.(\cos 2x)-2x.\sin 2x}{2\cos 2x}\right)=$$
$$=\frac{\cos 2.0-2.0.\sin 2.0}{2\cos 2.0}=\frac{1-0.0}{2.1}=\frac{1}{2}.$$

Задача 5. Да се намери границата при неопределена форма от вида $[0^0]$

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}=(\sin 0)^{\operatorname{tg}0}=[0^0]=a,$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}\right)=\ln a=\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg}x).\ln(\sin x)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{cotg}x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)'}{(\operatorname{cotg}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{(\sin x)^2}}=$$
$$=-\lim_{x\to 0}(\sin x).(\cos x)=0=\ln a$$
$$\ln a=0\Rightarrow a=e^0=1.$$

Задача 6. Да се намери границата при неопределена форма от вида $[\infty-\infty]$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{0}{\sqrt{1+\frac{1}{0^2}}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

V. В **пето ниво на модела** обучаваните решават задачи по темата самостоятелно. Преподавателят е пасивен - отговаря на възникнали въпроси, дава насоки и предложения. Получава обратна връзка (рефлексия) чрез анализиране и дискутиране на получените резултати. Подбраните от преподавателя задачи са подходящи за индивидуална домашна работа или за работа в екипи. За обучаваните това ниво е най-ефективното според Пирамидата на ученето. Те прилагат на практика наученото и задълбочават нивото на разбиране по съответната тема [2].

Подходящи задачи за самостоятелна и/ или екипна работа:

Задача 1. Намерете границата

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim_{x\to -2}\frac{x\big((x+1)(x+2)\big)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+1)}{x-3}=\frac{-2(-2+1)}{-2-3}=-\frac{2}{5}.$$

Задача 2. Да се намери границата при неопределена форма от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{1(1+0)}=1.$$

Задача 3. Да се намери границата при неопределена форма от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+\sin x}{x+\sin x}=\frac{e^\infty+\sin\infty}{\infty+\sin\infty}=\frac{\infty+0}{\infty+0}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}\left(\frac{\frac{e^x}{x}+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{e^x}{x}\right)+0}{1+0}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=e^\infty=\infty$$

Задача 4. Да се намери границата при неопределена форма от вида $[0.\infty]$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim_{x\to 0}\left(e^{\ln(\sqrt[x]{1-2x})}\right)=e^{\left(\lim\limits_{x\to 0}\ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}.\ln(1-2x)\right)}=e^{[\infty.0]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1-2x)}{x}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{2}{1-2x}}{1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2}{1-2x}\right)}=e^{\left(-\frac{2}{1-2.0}\right)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

Задача 5. Да се намери границата при неопределена форма от вида $[1^\infty]$

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=[1^\infty]=\lim_{x\to 1}e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{1-x}\ln x}=e^{[\infty.0]}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\left[\frac{0}{0}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}-\frac{1}{x}}=e^{-1}.$$

Задача 6. Да се намери границата при неопределена форма от вида $[\infty-\infty]$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right).\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{0}{2}=0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата статия е предложено обучение по темата Приложение на граница на функция за разкриване на неопределени форми, базирано на Петстепенния модел, предложен от А. Лечева за обучение по математика [3].

Моделът е построен върху основните принципи на конструктивизма на Джон Дюи [5], според които обучаваният научава точно това, което опознава чрез своята самостоятелна дейност, като са необходими определени познавателни, практически и творчески усилия, чрез които той да е в състояние да приложи тези знания в практиката.

Интерактивността, заложена в Петстепенния модел, дава възможност за взаимодействие както между обучаващия и обучаваните, така и между самите обучавани в диалогов режим. В учебната стая (традиционна или електронна) могат да се използват методи на обучение, допринасящи за развитие на конструктивно мислене, способност за изказване на мисли, способност за ясно и точно структурирано знание, способност за контакт с останалите и себеизразяване.

REFERENCES

[1] Indeterminate forms (October, 2021) https://brilliant.org/wiki/indeterminate-forms/.

[2] Learning pyramid (October, 2021) https://www.educationcorner.com/the-learning-pyramid.html.

[3] Lecheva, A., A five-level model of teaching mathematics based on constructivism and interactivity (2021), PROCEEDINGS OF UNIVERSITY OF RUSE - 2021, volume 59, in press (***Оригинално заглавие:*** *Петстепенен модел на обучение по математика, базиран на конструктивизма и интерактивността, Научна конференция на Русенски университет (2021), том 59, под печат*).

[4] Radkov, Tc., scientific advisors Anna Lecheva and Veselina Evtimova, Limit of function and applications (2021), Master degree project, Univercity of Ruse, (***Оригинално заглавие:*** *Граница на функция и приложения*, Дипломен проект, Русенски университет (2021))

[5] Tafrova-Grigorova A., Historical roots and development of constructivism (2016), Chemistry: Bulgarian Journal of Science Education, Volume 25, Number 1, pp. 75 – 106 (***Оригинално заглавие:*** *Исторически корени и развитие на конструктивизма (2016), Химия: Българско списание за наука и обучение, том 25,номер 1, стр. 75 - 106)*, https://azbuki.bg/wp-content/uploads/chemistry-pdfs/CHEMISTRY_25_1_TAFROVA.pdf

[6] www.mon.bg