FRI-ONLINE-1-ERI-07

USE OF INFORMATION TECHNOLOGIES IN TEACHING PARAMETRIC EQUATIONS AND INEQUALITIES IN SCHOOL[8]

Sevdalina Georgieva, MSc Student
Department of Mathematics,
University of Ruse
Tel.: +359 89 488 5852
E-mail: sevdalina095@abv.bg

Assoc. Prof. Antoaneta Mihova, PhD
Department of Mathematics,
Faculty of Natural Sciences and Education
University of Ruse
Tel.: +359 88 781 2896
E-mail: amihova@uni-ruse.bg

Abstract: *The report examines the need to use information technology in the teaching of parametric equations and inequalities in school. The solutions of a parametric equation and a parametric inequality are illustrated with the software product GeoGebra.*

Keywords: *parametric equations, parametric inequalities, information technology.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Учебният материал в училище, свързан с изучаването на параметрични уравнения и неравенства, е труден за усвояване от учениците. Задачите с параметър се решават чрез изследване и описване на възможните решения спрямо параметъра. Решаването им не става по строго определен модел, който може да се наизусти, за разлика от други видове задачи от училищния курс по математика, а изисква последователно и аналитично мислене. Много ученици запомнят схема за решаване на дадени задачи с параметър, но не успяват да вникнат в същността на тези задачи. За успешното изследване на едно параметрично уравнение е необходимо учениците да имат утвърдени математически знания и да владеят добра логика, но също така и да умеят да проявяват творчески подход, което прави тези задачи изключително подходящи за тестването на знанията и уменията на учениците на математически олимпиади и състезания.

ИЗЛОЖЕНИЕ

В помощ на преподавателите за изясняване на определен учебен материал могат да се използват съществуващите днес различни софтуерни продукти. Тези продукти са подходящи за приложение и в училище и в университета. Така например във (Василева, Р., 2015 г.) е споделен опит от използването на математическия софтуер Maple при обучението по дисциплината Линейна алгебра, в (Кадирова, С., 2018 г.) е представено приложение на Matlab за решаване на задачи с използване правилото на Хорнер, в (Михова, А., 2013 г.) е описано използването на софтуерния продукт *Mahtematica* при изучаването на определен интеграл.

За по-лесното разбиране решението на задачи, свързани с параметрични уравнения и неравенства, би помогнало използването на математически софтуер, който да онагледи различните решения, в зависимост от различни стойности на параметрите, участващи в

[8] Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 29 октомври 2021 г. в секция "Образование – изследвания и иновации" с оригинално заглавие на български език: ИЗПОЛЗВАНЕ НА ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ ПРИ ПРЕПОДАВАНЕ НА ПАРАМЕТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В УЧИЛИЩЕ.

уравнението или неравенството. Настоящият доклад разглежда приложение на динамичния геометричен софтуер GeoGebra. Представени са решенията на едно параметрично уравнение и на едно параметрично неравенство.

Задача 1. Да се реши уравнението $x^2 - 3x + k + 1 = 0$, където k е реален параметър.

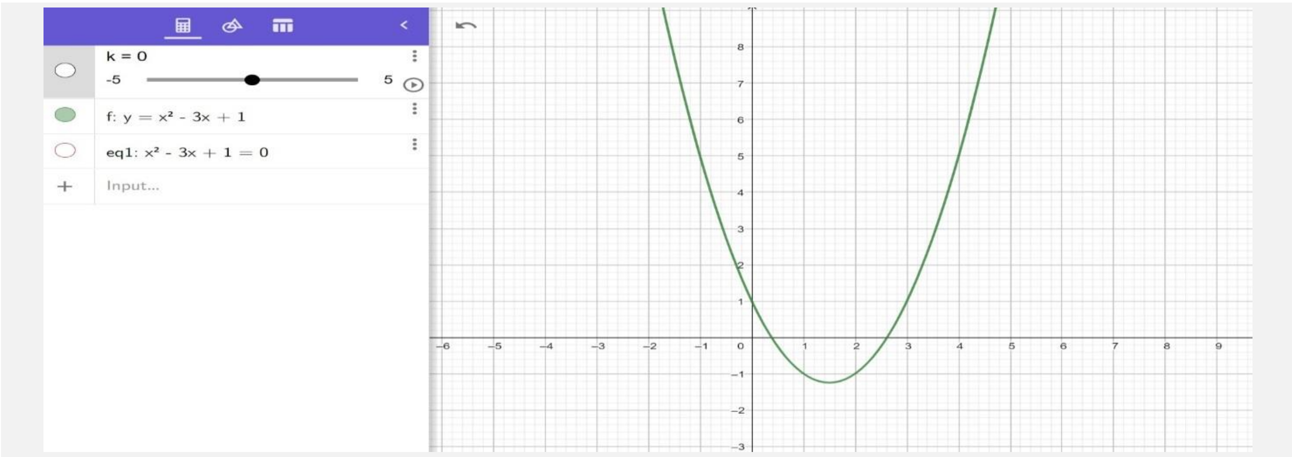
Решението на уравнението зависи от стойностите на дискриминантата му.

$$D = 9 - 4(k + 1) = 5 - 4k$$

Има три възможности за нейната стойност – да е отрицателна, да е равна на нула или да е положителна.

Чрез софтуерното приложение GeoGebra графично се изследва решението на уравнението за всеки от случаите.

Въвежда се функцията $y = x^2 - 3x + k + 1$.



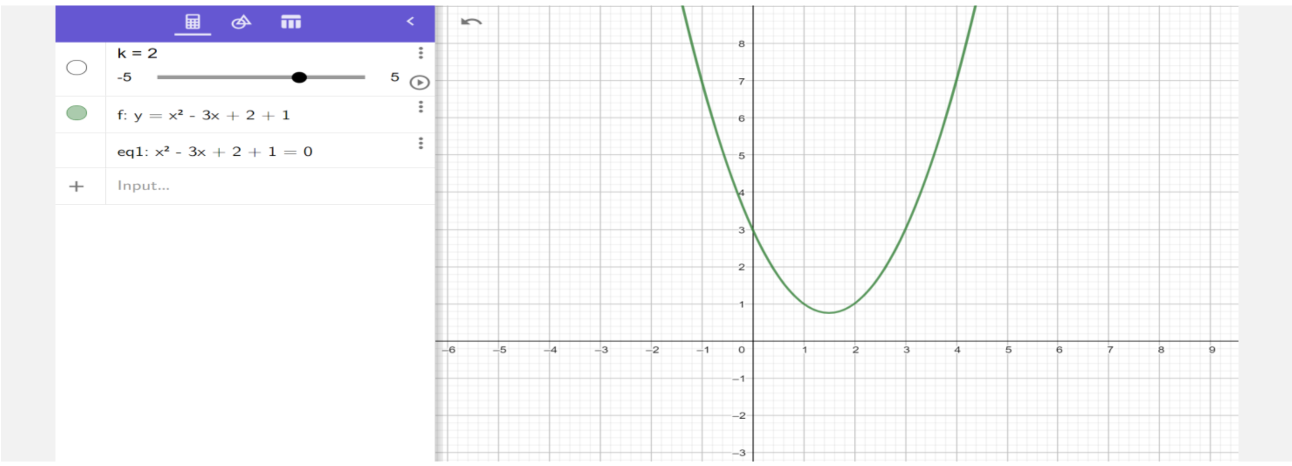
Фиг. 1

За параметъра k автоматично се генерира слайдер (Фиг. 1), който позволява заместването на параметъра във функцията с различни стойности, които по подразбиране са от -5 до 5, но могат да се променят. За дадения пример това не е необходимо.

Въвежда се уравнението $x^2 - 3x + k + 1 = 0$. Решението му се изобразява графично върху чертежа.

Вземат се различни стойности на параметъра и чрез промяната в графиката се правят изводи за решението. Различните случаи са:

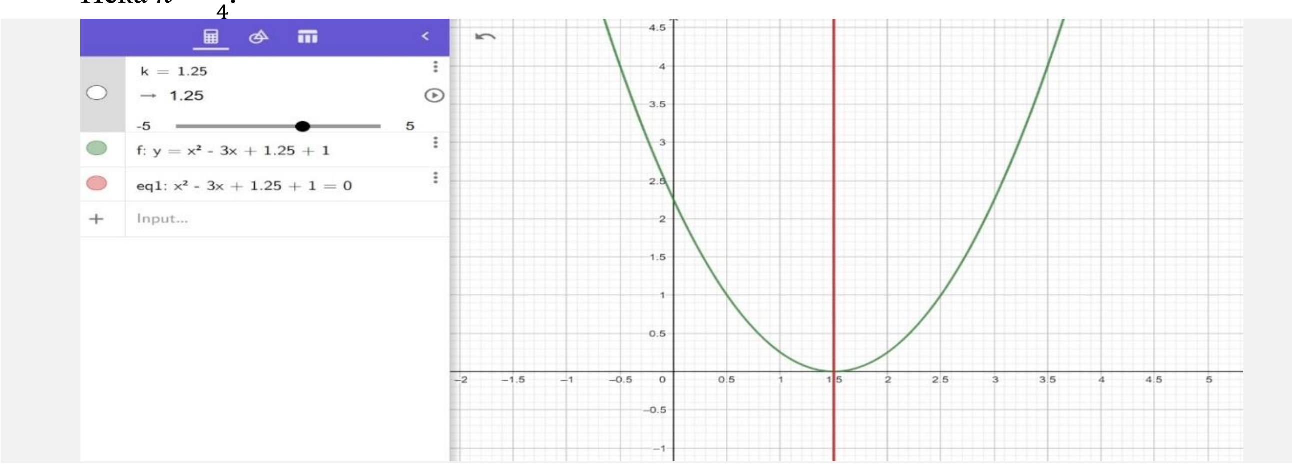
При $k > \frac{5}{4}$ $\Rightarrow$ взема се стойност, по-голяма от $\frac{5}{4}$, например нека $k = 2$.



Фиг. 2

В този случай графиката на функцията не пресича абсцисната ос и уравнението няма решение (Фиг. 2).

Нека $k = \frac{5}{4}$.

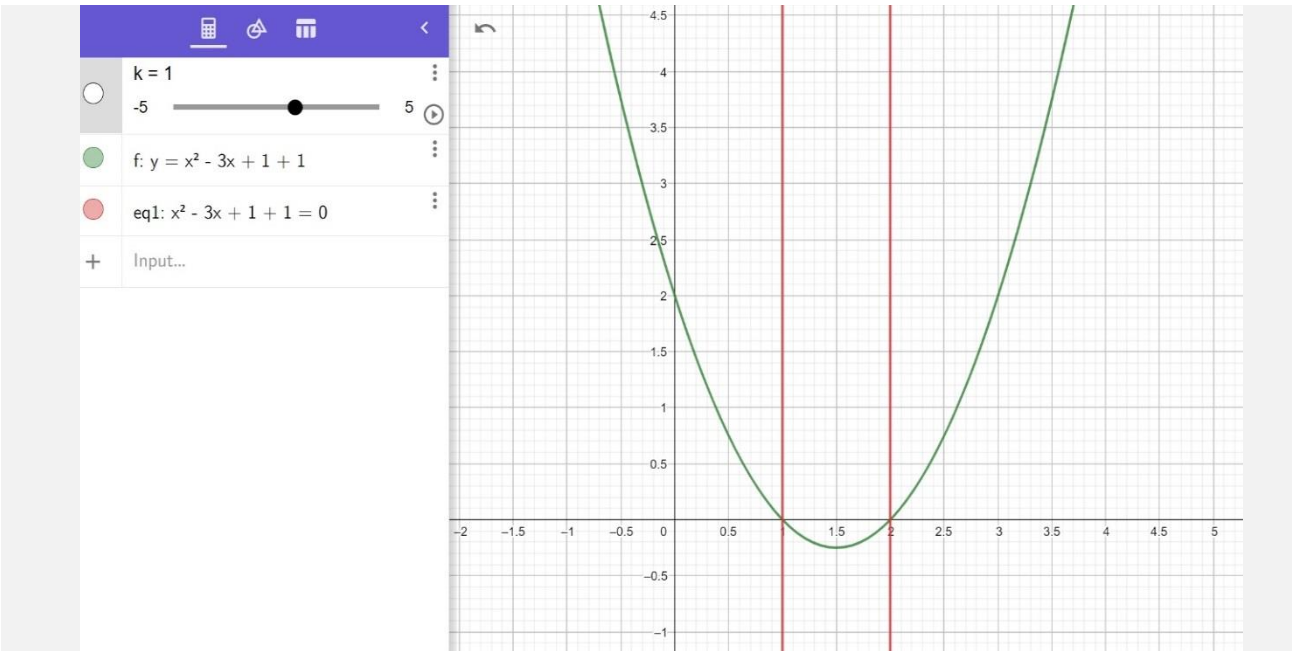


Фиг. 3

В този случай уравнението има единствено решение, което не зависи от параметъра (Фиг. 3)

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = 1{,}5$$

При $k < \frac{5}{4}$ $\Rightarrow$ взема се стойност, по-малка от $\frac{5}{4}$, например $k = 1$.



Фиг. 4

В този случай уравнението има два корена, това може да се онагледи чрез смяна на стойностите на параметъра в дадения интервал (Фиг. 4).

За $k = 1$ корените са

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 2,$$

а в общия случай за интервала $k \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$ корените на уравнението са

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5 - 4k}}{2}$$

Решението на задачата може да се обобщи в следната таблица (Таблица 1):

Таблица 1

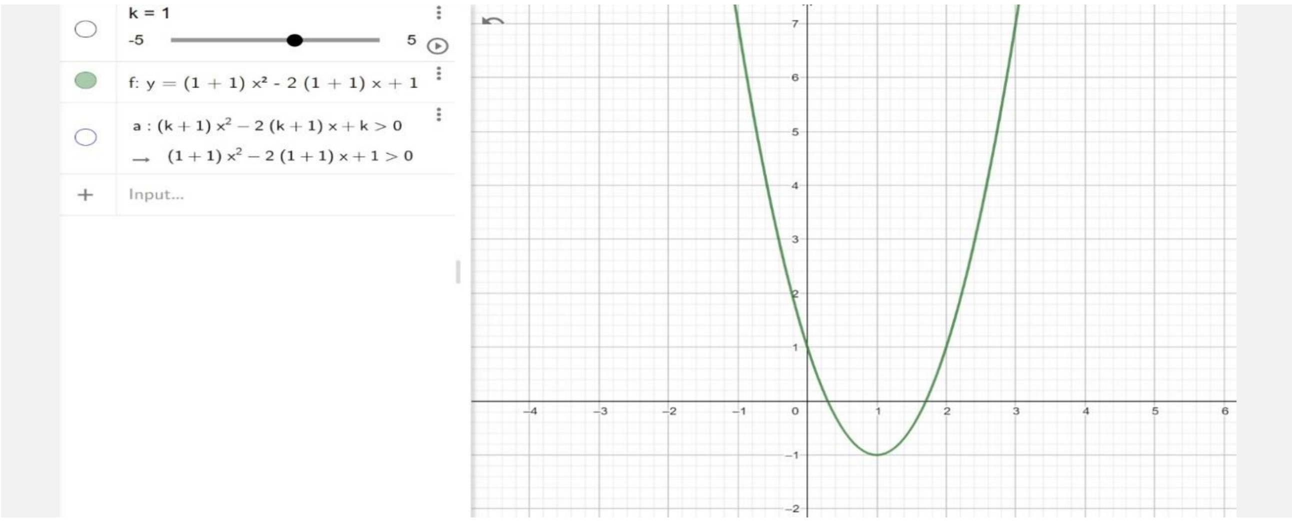
Стойност на параметъра k	Контролна стойност на параметъра k	Решение на уравнението

$k \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$	$k = 1$	$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5 - 4k}}{2}$
$k = \frac{5}{4}$		$x = 1{,}5$
$k \in \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$	$k = 2$	Няма решение

Задача 2. Да се реши неравенството $(k + 1)x^2 - 2(k + 1)x + k > 0$, където k е параметър.

Отново се използва софтуерният продукт GeoGebra, за да се изобразят графично отделните случаи.

Въвежда се функцията $y = (k + 1)x^2 - 2(k + 1)x + k$.



Фиг. 5

За параметъра k автоматично се генерира слайдер (Фиг. 5), който позволява заместването на параметъра във функцията с различни стойности, които по подразбиране са от -5 до 5, но могат да се променят. За дадения пример това не е необходимо.

Очевидно е, че $k = -1$ е критична стойност, тъй като в този случай коефициентът пред втората степен става 0.

Дискриминантата на уравнението $(k + 1)x^2 - 2(k + 1)x + k = 0$ е

$$D' = (k + 1)^2 - k(k + 1) = k + 1$$

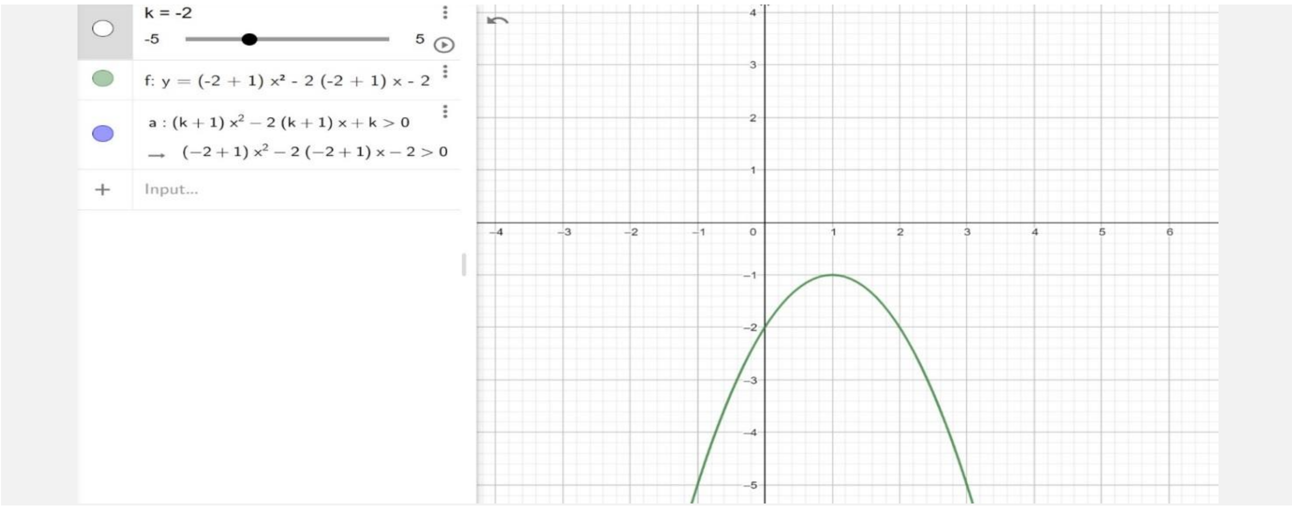
Разглеждат се три случая – със стойност на параметъра, при която дискриминантата е по-малка от нула, равна на нула (случаят съвпада със случая, когато коефициентът пред втората степен е 0) и по-голяма от нула.

Въвежда се неравенството $(k + 1)x^2 - 2(k + 1)x + k > 0$ и решението му се изобразява графично, като се „засича“ с вече изобразената графика.

Вземат се различни стойности на параметъра и чрез промяната в графиката се правят изводи за решението.

Различните случаи са:

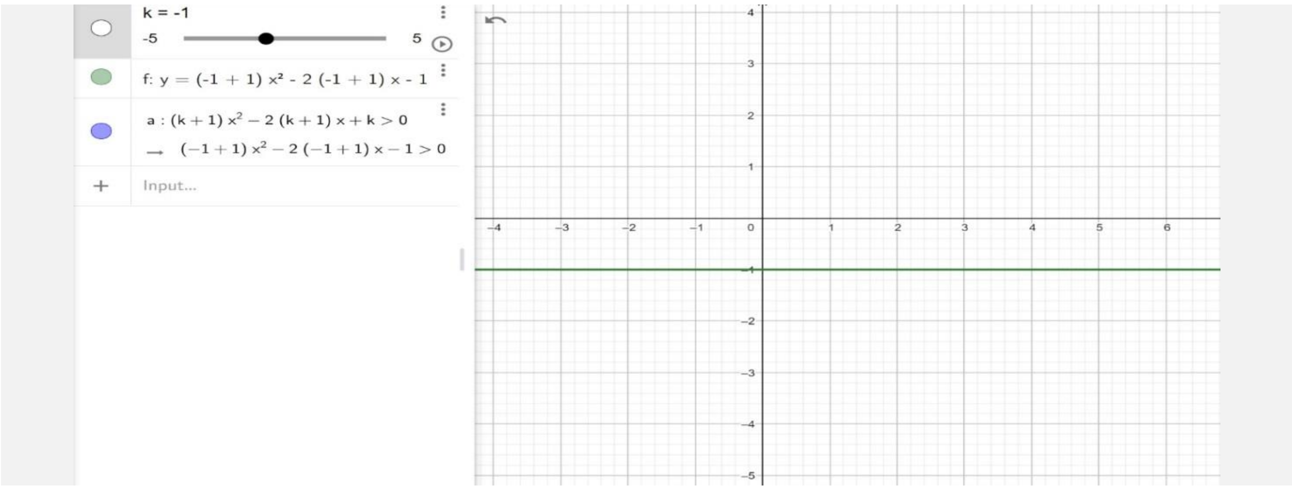
При $k < -1 \Rightarrow$ взима се стойност по-малка от -1, например -2.



Фиг. 6

Вижда се, че графиката на функцията е изцяло под абсцисната ос (Фиг. 6), което означава, че в този случай функцията приема само отрицателни стойности, а това означава, че няма как да е по-голяма от нула и неравенството няма решение. Затова и не се вижда „засичане“ на графиката.

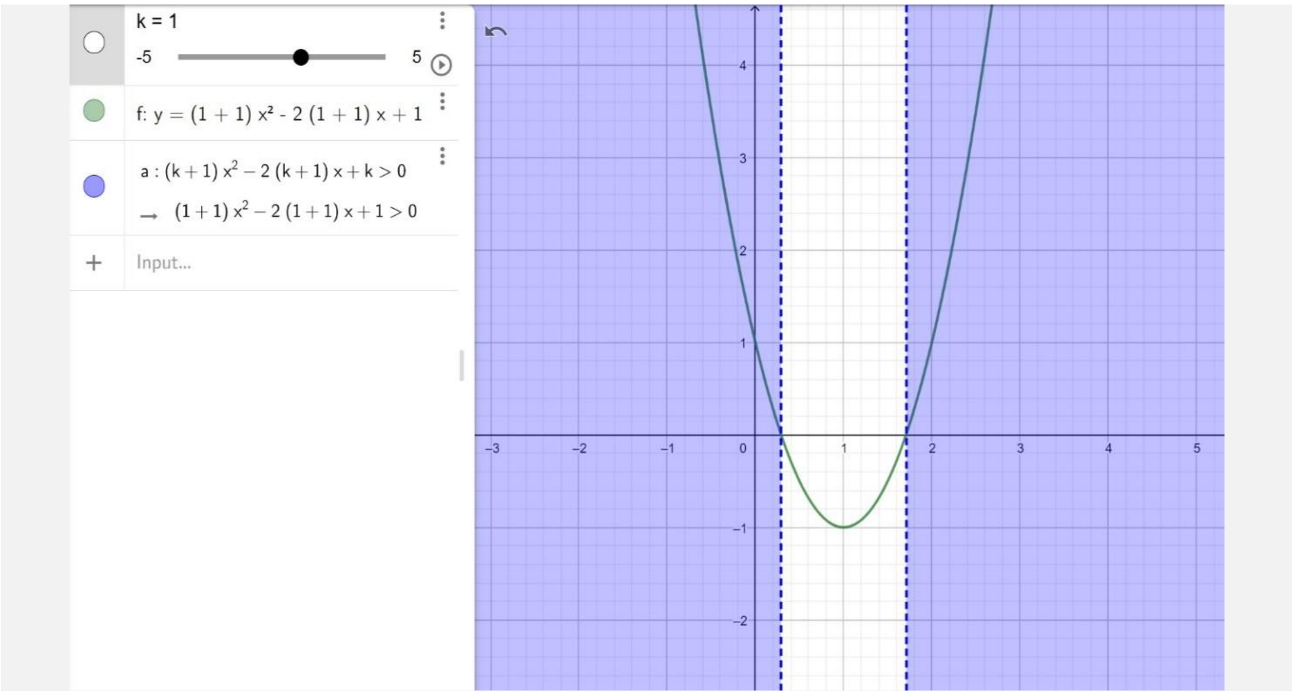
При $k = -1$.



Фиг. 7

В този случай за всички стойности на променливата функцията приема стойност $y = -1$ (Фиг. 7) и отново равенството не е изпълнено и съответно няма „засичане“ на графиката.

При $k > -1 \Rightarrow$ взема се стойност за параметъра, по-голяма от -1, например 1.



Фиг. 8

В този случай функцията има положителни стойности, което означава, че неравенството има решение. От графиката се вижда, че решението е от $-\infty$ до по-малкия корен и от по-големия корен до $+\infty$ (Фиг. 8).

Двата корена в зависят от стойностите на параметъра:

$$x_{1,2} = \frac{-(k+1) \pm \sqrt{k+1}}{k+1}$$

Решението на задачата може да се обобщи в следната таблица (Таблица 2):

Таблица 2

Стойност на параметъра k	Контролна стойност на параметъра k	Решение на неравенството
$k \in (-\infty; -1)$	$k = -2$	$x \in \emptyset$
$k = -1$		$x \in \emptyset$
$k \in (-1; +\infty)$	$k = 1$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ $x_1 < x_2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачите с параметрични уравнения и неравенства са важна част от училищния курс по математика. Те излизат от стандартните рамки за решаване на задачи и изискват по-различен подход – необходимо е ученикът наистина да е вникнал в същността на задачите, за да може да ги реши, тъй като много често освен логика и силни познания е необходим и творчески подход. Именно това прави този тип задачи толкова значими за развиването на логическото мислене и математическите умения на учениците.

За съжаление, в новата учебна програма по математика не се набляга значително на задачи с параметър. Те се разглеждат предимно в паралелките с профилирана подготовка или в свободно избираемите часове. Намаляването на този вид задачи се дължи на факта, че са трудноразбираеми за повечето ученици и тяхното неразбиране може да обезсърчи учениците и да намали мотивацията им.

Именно тяхното разнообразие и фактът, че подходът на решаване не е един и същ за всички задачи, е това, което ги прави полезни за развитието на логическите способности на учениците. Затруднението на учениците може да бъде намалено, ако в предаването на този материал се използва онагледяване на разглежданите примери чрез средствата на информационните технологии. Съчетаването на стандартно решаване на задачите с параметър с онагледяване може да направи разбирането им по-лесно.

Задачите с параметър развиват у учениците важни компоненти от математическите способности като способност за обобщаване, находчивост, логическо мислене и гъвкавост на мисленето. За решаването на такива задачи са необходими съобразителност и способност за абстрахиране. Развитието на тези способности са важна част от системата на съвременното образование и са задължителни за успешното формиране на личността на ученика.

REFERENCES

Василева, Р., Е. Великова, 2015, Съвременни методи на обучение по математика, Научни трудове на РУ „Ангел Кънчев”, том 54, сер. 6.4, Русе, 47-51, ISSN 1311-3321.

Кадирова С., А. Лечева, В. Евтимова, 2018, Приложения на правилото на Хорнер с използване на програмния продукт Matlab, СНС, РУ, том 57, сер. 6.6, Русе, 16-22, ISSN 1311-3321.

Михова, А., 2013, Използване на компютърната система *Mathematica* при изучаване на определен интеграл, Научни трудове на РУ „Ангел Кънчев”, том 52, сер. 6.1, Русе, 47-51, ISSN 1311-3321.