FRI-2.116-1-ERI-11

# APPLICATION OF THE FIVE-LEVEL MODEL OF TEACHING MATHEMATICS ON THE TOPIC GEOMETRIC PROGRESSION AND IT'S PROPERTIES [14]

**Iliyana Georgieva – MSc Student**
Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359876778854
E-mail: ili.gr1980@abv.bg

**Assist. Prof. Anna Lecheva, PhD**
Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 82 888 453
E-mail: alecheva@uni-ruse.bg

**Assoc. Prof. Veselina Evtimova, PhD**
Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Phone: +359 82 888 453
E-mail: v.evtimova@gmail.com

***Abstract:*** *This paper presents Geometric progression and its properties. This topic is a part of the Progressions module, which is included in the compulsory Mathematics curriculum in the 10th grade. The Five-level Mathematics teaching model suggested by A. Lecheva has been applied. The model's stages are described and relevant examples and tasks have been selected. The developed methodology is applicable for both traditional and distance education.*

***Keywords:*** *Progressions, Geometric progression, Five-level teaching model.*

## ВЪВЕДЕНИЕ

Обучението по математика в 10.клас е насочено към овладяване на базисни знания и умения, свързани с постигане на изискванията за резултатите от обучението по учебния предмет Математика. Изграждат се ключови компетентности на ученика (***Таблица 1.***).

Очакваните компетентности в края на курса за обучение по *Прогресии* са ученикът да:

- ✓ Умее да намира елементи на аритметична и геометрична прогресия,
- ✓ Умее да решава комбинирани задачи от аритметична и геометрична прогресия,
- ✓ Умее да конструира числови редици по дадено правило,
- ✓ Умее да моделира процеси с прогресия и с лихва,
- ✓ Решава практически задачи, свързани със сложна лихва [5].

Въпросът за резултатността на учебния процес е изключително значим в съвременната педагогическа психология. Неговото решение е свързано с търсенето и намирането на най-подходящи условия за провеждането на учебния процес при всяка конкретна обстановка.

При обучението основно значение има взаимодействието между учителя и учениците, както и между самите ученици, което ги поставя в активна позиция. Осъществяването на различни дейности в учебния процес води до превръщане на ученика в партньор на

[14] Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 28 октомври 2022 г. в секция Образование – изследвания и иновации с оригинално заглавие на български език: ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПЕТСТЕПЕННИЯ МОДЕЛ НА ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ПО ТЕМАТА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСИЯ И НЕЙНИТЕ СВОЙСТВА.

преподавателя и повишава неговата мотивация за учене и осъвършенстване. Това се постига чрез прилагането на многообразие от методи, определяни като интерактивни.

**Таблица 1.** ***Учебно съдържание за 10.клас на МОН***

| **Теми** | **Компетентности като очаквани резултати от обучението** | **Нови понятия** |
|---|---|---|
| **2. Прогресии.**<br>2.1. Числови редици. Начини за задаване на числови редици.<br>2.2. Аритметична прогресия. Формула за общия член на аритметична прогресия.<br>2.3. Свойства на аритметичната прогресия.<br>2.4. Формула за сбора от първите *n* члена на аритметична прогресия.<br>2.5. Геометрична прогресия. Формула за общия член.<br>2.6. Свойства на геометричната прогресия.<br>2.7. Формула за сбор от първите *n* члена на геометрична прогресия.<br>2.8. Комбинирани задачи от аритметична и геометрична прогресия.<br>2.9. Проста лихва. Сложна лихва.<br>2.10. Практически задачи, свързани със сложна лихва. | • знае понятието числова редица и понятията и свойствата, свързани с него;<br>• конструира числова редица по дадено правило;<br>• умее да определя дали една редица е монотонна;<br>• знае понятията аритметична и геометрична прогресия и техните свойства;<br>• умее да намира елементите на аритметична и геометрична прогресии;<br>• умее да решава комбинирани задачи от аритметична и геометрична прогресия;<br>• умее да моделира с прогресия;<br>• знае понятието лихва и умее да моделира с него;<br>• умее съдържателно да интерпретира получен резултат;<br>• преценява вярност, рационалност и целесъобразност при избор на подхода в конкретна ситуация и умее да обосновава изводи. | • числова редица,<br>• крайна и безкрайна числова редица,<br>• член на числова редица,<br>• общ член на числова редица,<br>• номер на член на числова редица,<br>• растяща числова редица,<br>• намаляваща числова редица,<br>• монотонна числова редица,<br>• рекурентна зависимост,<br>• аритметична прогресия,<br>• разлика на аритметична прогресия,<br>• геометрична прогресия,<br>• частно на геометричната прогресия,<br>• проста лихва,<br>• сложна (капитализирана) лихва,<br>• депозит (влог),<br>• лихвен период,<br>• лихвен процент,<br>• първоначален капитал,<br>• нараснала сума,<br>• кредит,<br>• рента,<br>• погасителна вноска,<br>• лизинг |

Интерактивно базираното обучение е преди всичко диалогово обучение, в процеса на което се осъществява връзка между обучаващия и обучавания, и предполага взаимно разбиране, съвместно решаване на общи, но значими за всеки участник казуси [4].

Петстепенният модел за обучение по Математика е основан на базисните нива в Пирамидата на ученето [3] и включва следните степени:

1. Основни понятия по темата - определения и теореми;
2. Връзки с изучени теми и / или междупредметни връзки;
3. Технология за решаване на задачи по темата;
4. Придобиване на умения - приложение на теорията;
5. Разширяване на уменията - самостоятелна работа / работа в екип.

В **първото ниво** преподавателят дава определения на основните понятия по темата, формулира теореми, твърдения и следствия. Това е пасивно ниво, на което обучаваните навлизат в тематиката.

Във **второто ниво** обучаващият свързва новата тема с познати и изучени теми и задава междупредметни връзки, ако има такива. Целта е учащите да осмислят по-лесно нововъведените понятия, като ги свързват с нещо вече изучено. Това отново е пасивно ниво.

В **третото ниво** преподавателят онагледява методи и демонстрира технологията за решаване на конкретни задачи по темата, използва формули и таблици. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето.

В **четвърто ниво** обучаваните дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от учителя, предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това също е активно ниво.

В **петото ниво** се решават задачи по темата от обучаваните самостоятелно или разделени на екипи. В този етап на метода преподавателят става неактивен участник в процеса на обучение, т.е. отговаря само на възникнали въпроси, дава насоки и предложения, получава обратна връзка (рефлексия) чрез анализиране и дискутиране на получените резултати. Това ниво е най-ефективното за учениците според Пирамидата на учене. На този етап те прилагат на практика усвоения учебен материал [4].

Темата ***Геометрична прогресия и нейните свойства*** е развита в настоящата публикация съобразно етапите на Петстепенния модел [2].

## ИЗЛОЖЕНИЕ

I. В **първото ниво на модела** е задължително преподавателят да въведе учениците в темата, като даде определения на основните понятия, формулира необходимите теореми, твърдения и следствия. Тъй като това е пасивно ниво, на което учениците навлизат в тематиката, преподавателят има възможност да използва разнообразни иновативни техники и технологии.

Въз основа на един от основните принципи на конструктивизма, който гласи, че учебникът не е основен източник на информация, преподавателят би могъл да поднесе теоретичния материал под формата на презентация, документ в електронен формат или аудио-видео материал. За целта би могъл да използва иновативни компютърни технологии, ако обучението се провежда в оборудвана компютърна зала или да споделя текстови и / или видео файлове при електронно обучение [4].

Без значение от техниката на преподаване и използваните технологии, задължително е учениците да получат следните основни теоретични познания по темата:

**1. Геометрична прогресия. Формула за общия член на геометрична прогресия.**

***Определение 1.*** Числова редица, в която всеки член след първия се получава, като предходния му член се умножи с едно и също число (частно на прогресията), се нарича *геометрична прогресия*. Означава се с ∺ .

***Определение 2.*** Числото, с което се умножава всеки член на една геометрична прогресия, за да се получи следващия член, се нарича *частно на прогресията*. Означава се с буквата $q$.

***Теорема 1.*** За всеки член на една геометрична прогресия е в сила формулата $a_n = a_1 . q^{n-1}$, където $a_1$ е първият член, а $q$ – частното на прогресията [1].

**2. Свойства на прогресията.**

***Свойство 1.*** Една числова редица $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ \dots$ е геометрична прогресия тогава и само тогава, когато за всяко $n \geq 2$ е изпълнено $a_n^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$.

***Свойство 2.*** Във всяка крайна геометрична прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ произведението на два члена, равноотдалечени от крайните ѝ членове, е равно на произведението на двата крайни члена, т.е. $a_1 . a_n = a_2 . a_{n-1} = a_3 . a_{n-2} = \cdots$ [1].

II. Във **второто ниво на модела** новата тема се свързва с познати и изучени теми и се задават междупредметни връзки, ако има такива. Целта е учениците да разберат по-лесно новите понятия, като ги свържат с нещо познато. Тъй като това е пасивно ниво, удачно е преподавателят да продължи да използва техниките и технологиите, които е прилагал в първото ниво на модела [4].

Подходящи връзки с изучени теми са:

- Решаване на квадратно уравнение;
- Степенуване;
- Коренуване;
- Действия с обикновени дроби;
- Формули за съкратено умножение.

III. В **трето ниво на модела** преподавателят прилага методи и технологии за решаване на конкретни задачи по темата ***Геометрична прогресия и нейните свойства***. Той използва формули и показва примери, с които учениците разполагат предварително. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето.

Необходимо е демонстрацията да започне с лесни примери, които имат пряка връзка с вече изучени теми [4].

**Пример 1.** За коя стойност на $x$ числата $x, x+14, 18$ са последователни членове на геометрична прогресия?

***Решение:*** Според *Свойство 1*:

$$(x+4)^2 = 18x$$
$$x^2 + 8x + 16 = 18x$$
$$x^2 - 10x + 16 = 0$$
$$D = b^2 - 4.a.c = 36$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 \pm 6}{2}$$
$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 8.$$

При $x_1 = 2$ геометричната прогресия, която се образува, е 2, 6, 18 ($q = 3$).

При $x_2 = 8$ геометричната прогресия, която се образува, е 8, 12, 18 ($q = \frac{3}{2}$).

При $x_1 = 2$ и $x_2 = 8$ числата $x, x+4, 18$ са последователни членове на геометрична прогресия [1].

**Пример 2.** В геометрична прогресия е дадено $a_1.a_5 = 144$. Намерете:

а) $a_3$

б) $a_2.a_4$

***Решение:*** От *Свойство 2*:

а) $$a_1.a_5 = a_3.a_3 = 144$$
$$a_3^2 = 144$$
$$a_3 = \pm\sqrt{144}$$
$$a_3 = \pm 12$$

б) $$a_1.a_5 = a_2.a_4 = 144$$
$$a_2.a_4 = 144$$

**Пример 3.** За геометрична прогресия е известно, че $a_3 = 3$. Намерете произведението на първите пет члена на прогресията.

***Решение:*** От *Свойство 2*:

$$a_1.a_5 = a_2.a_4 = a_3.a_3 = 3.3 = 9$$

Тогава $a_1.a_2.a_3.a_4.a_5 = (a_1.a_5).(a_2.a_4).a_3 = 9.9.3 = 243$ [1].

IV. В **четвърто ниво на модела** се дава възможност на учениците да дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от учителя. Те предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това също е активно ниво според Пирамидата на ученето [3].

Следните задачи са подходящи за това ниво на обучение:

**Задача 1.** За коя стойност на $x$ числата $3x+2, 2x, 2$ са последователни членове на намаляваща геометрична прогресия?

***Решение:*** От *Свойство 1*:

$$(2x)^2 = (3x+2).2$$
$$4x^2 = 6x+4$$
$$4x^2 - 6x - 4 = 0 \text{ /:2}$$
$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$D = b^2 - 4.a.c = 25 = 5^2$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{4}$$
$$x_1 = -\tfrac{1}{2} \text{ и } x_2 = 2.$$

При $x_1 = -\frac{1}{2}$ геометричната прогресия, която се образува, е $\frac{1}{2}, -1, 2$ и не е решение на задачата.

При $x_2 = 2$ геометричната прогресия, която се образува, е 8, 4, 2 и е решение на задачата [1].

**Задача 2.** За коя стойност на $x$ числата $x-5, x-1, 2x+4$ са последователни членове на геометрична прогресия с отрицателни членове?

***Решение:*** От *Свойство 1*:

$$(x-1)^2 = (x-5)(2x+4)$$
$$x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 4x - 10x - 20$$
$$x^2 - 2x^2 - 2x - 4x + 10x + 1 + 20 = 0$$
$$-x^2 + 4x + 21 = 0$$
$$x^2 - 4x - 21 = 0$$
$$D = b^2 - 4.a.c = 100 = 10^2$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm 10}{2}$$
$$x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 7$$

При $x_1 = -3$ геометричната прогресия, която се образува, е -8, -4, -2 и е решение на задачата.

При $x_2 = 7$ геометричната прогресия, която се образува, е 2, 6, 18 и не е решение на задачата [1].

**Задача 3.** В геометрична прогресия е дадено $a_1.a_7 = 4$. Намерете:

а) $a_4$

б) $a_3.a_5$

***Решение:*** От *Свойство 2*:

а) $a_1.a_7 = a_2.a_6 = a_3.a_5 = a_4^2 = 4$

$$a_4^2 = 4$$
$$a_4 = \pm\sqrt{4}$$
$$a_4 = \pm 2$$

б) $a_1.a_7 = a_3.a_5$

$$a_3.a_5 = 4\,.$$

V. В **пето ниво на модела** учениците решават задачи по темата самостоятелно. Преподавателят заема пасивна роля - отговаря на възникнали въпроси и дава насоки при решаването на задачите. В този етап е важно учителят да получи обратна връзка за степента на усвояване на новия материал чрез дискусия и анализ на получените резултати и решенията на задачите. Избраните от учителя задачи са подходящи за самостоятелна домашна работа или за работа в екипи. Това ниво е най-ефективното според Пирамидата на ученето. Учениците прилагат на практика наученото и задълбочават нивото на разбиране по съответната тема [4].

Подходящи задачи за самостоятелна и / или екипна работа са следните:

**Задача 1.** В геометрична прогресия е дадено $a_5 = 2$. Намерете $a_3.a_7$.

**Задача 2.** За коя стойност на $x$ числата $x-7, x-3, 2x$ са последователни членове на геометрична прогресия с положителни членове?

**Задача 3.** В геометрична прогресия е дадено $a_7 = 9$. Намерете:

а) $a_5 . a_9$

б) $a_3 . a_{11}$

**Задача 4.** За геометрична прогресия е известно, че $a_5 = 2$. Намерете произведението на първите девет члена на прогресията [1].

## ИЗВОДИ

Настоящата публикация представя урок, в който е приложен Петстепенният модел за обучение по математика, предложен от А. Лечева [4]. Урокът е подходящ за въвеждане, задълбочаване и разширяване на знанията и уменията на учениците по темата *Геометрична прогресия и нейните свойства.* Разработената тема може да се използва за традиционно и дистанционно обучение.

Използваният модел допринася за развиване на конструктивно мислене, способност за изказване на твърдения, способност за придобиване на ясно и точно структурирано знание, за контакт с останалите и за себеизразяване.

## БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2022-ФПНО-03, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

## REFERENCES

Alashka M., Alashka R., Paskalev P., “Mathematics 10-th grade”, Arhimed, 2019, (***Оригинално заглавие:*** Алашка М., Алашка Р., Паскалев П., „*Математика 10 клас*”, Архимед, 2019)

Georgieva I., scientific advisors Anna Lecheva and Veselina Evtimova, Number series and applications in the school course in Mathematics (2022), Master degree project, Univercity of Ruse, (***Оригинално заглавие:*** *Числови редици и приложения в училищния курс по Математика,* Дипломен проект, Русенски университет (2022))

Learning pyramid (October, 2021) https://www.educationcorner.com/the-learning-pyramid.html

Lecheva, A., *A five-level model of teaching mathematics based on constructivism and interactivity*, PROCEEDINGS OF UNIVERSITY OF RUSE - 2021, volume 60, book 6.4, pp. 59-64 (***Оригинално заглавие:*** *Петстепенен модел на обучение по математика, базиран на конструктивизма и интерактивността*), Научна конференция на Русенски университет (2021), том 60, книга 6.4, стр. 59-64, ISBN: 2603-4123 https://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp21/6.4/6.4-9.pdf

Ministry of Education and Science - *Министерство на образованието и науката*, https://www.mon.bg/

FRI-2.116-1-ERI-12

# THE TOPIC OF GEOMETRIC PROBABILITY IN THE PLANE AND SPACE IN THE SCHOOL MATHEMATICS COURSE[15]

**Lidiya Petrova – MSc Student**
Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 876 667 168
E-mail: lpetrova@vaprilov-ruse.com

**Assist. Prof. Anna Lecheva, PhD**
Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 82 888 453
E-mail: alecheva@uni-ruse.bg

**Assoc. Prof. Veselina Evtimova, PhD**
Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Phone: +359 82 888 453
E-mail: v.evtimova@gmail.com

***Abstract:*** *This paper presents Geometric probability in plane and space. It is suitable as introduction, developing the knowledge and skills of students in the module Elements of the probability theory and statistics, included in the Mathematics curriculum in 11th grade. The used teaching model allows interaction not only between the teacher and the students, but also between the students themselves. The developed instructional materials can be easily adapted for distance education.*

***Keywords:*** *Geometric probability, Five-level teaching model, Mathematics competence.*

## ВЪВЕДЕНИЕ

В наши дни все повече се налага използването на различни иновативни методи на обучение, поради все по-развиващото се информационно общество. Обучаваните се нуждаят от адекватни съвременни методи за преподаване, които да отговарят на техните изисквания, потребности и нагласи.

Обучението по Математика в 11. клас е насочено към овладяване на базисни знания и умения, свързани с постигане на изискванията за резултатите от обучението по учебния предмет Математика и с изграждане на ключови компетентности на ученика. Обучението по Математика на ниво общообразователна подготовка е основа за обучението по Математика на ниво профилирана подготовка. Очакваните компетентности в края на курса *Елементи от теория на вероятностите и статистика* са:

- ✓ ученикът да разчита и интерпретира информация, представена с графики, с таблици или с диаграми,
- ✓ да знае понятието условна вероятност и да умее да го прилага за намиране вероятност на сечение на две събития,
- ✓ да знае понятието геометрична вероятност и да умее да я намира в конкретни ситуации върху правата и в равнината [4].

[15] Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 28 октомври 2022 г. в секция Образование – изследвания и иновации с оригинално заглавие на български език: ТЕМАТА ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ В РАВНИНАТА И ПРОСТРАНСТВОТО В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА.

Въпросът за ефективността на учебния процес е изключително важен в съвременната педагогическа психология. Неговото решение е свързано с търсенето и намирането на най-подходящи условия за провеждането на учебния процес при всяка конкретна обстановка.

При обучението основно значение има взаимодействието между обучаващия и учещите, както и между самите учещи, което ги поставя в активна позиция. Реализирането на различни дейности в учебния процес води до превръщане на учещия в партньор на преподавателя и повишава неговата мотивация за учене. Това реално се постига чрез използването на многообразие от методи, определяни като интерактивни.

Интерактивно базираното обучение е диалогово обучение, в хода на което се осъществява взаимодействие между обучаващия и обучавания, и предполага взаимно разбиране, съвместно решаване на общи, но значими за всеки участник задачи [3].

Подходящ за обучението по Математика е Петстепенният модел, който се базира на основните нива в Пирамидата на ученето и включва следните степени [3]:

1. Основни понятия по темата - определения и теореми;
2. Връзки с изучени теми и / или междупредметни връзки;
3. Технология за решаване на задачи по темата;
4. Придобиване на умения - приложение на теорията;
5. Разширяване на уменията - самостоятелна работа / работа в екип.

На **първо ниво** преподавателят дава определения на основните понятия по темата, формулира теореми, твърдения и следствия. Това е пасивно ниво, на което обучаваните навлизат в тематиката.

На **второ ниво** преподавателят обвързва новата тема с познати и изучени теми и задава междупредметни връзки, ако има такива. Целта е обучаваните да осмислят по-лесно новите понятия, като ги свързват с нещо познато. Това е пасивно ниво.

На **трето ниво** преподавателят демонстрира методи, показва технологията за решаване на конкретни задачи по темата, използва формули и таблици. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето.

На **четвърто ниво** обучаваните дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от преподавателя, предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това е активно ниво.

На **пето ниво** обучаваните решават задачи по темата самостоятелно. Преподавателят е пасивен - отговаря на възникнали въпроси, дава насоки и предложения, получава обратна връзка (рефлексия) чрез анализиране и дискутиране на получените резултати. За обучаваните това ниво е най-ефективното според Пирамидата на учене. Те прилагат на практика наученото и задълбочават нивото на разбиране по темата.

Темата за *Геометрична вероятност в равнината и пространството* е разработена, съобразно етапите на Петстепенния модел [6].

## ИЗЛОЖЕНИЕ

I. В **първото ниво на модела** е задължително преподаващият да въведе обучаваните в темата, като даде определения на основните понятия, формулира нужните теореми, твърдения и следствия. Тъй като това е пасивно ниво, на което учащите навлизат в тематиката, преподавателят има възможност да използва разнообразни иновативни техники и технологии.

Въз основа на един от основните принципи на конструктивизма, който гласи, че учебникът не е основен източник на информация, преподаващият би могъл да поднесе теоретичния материал под формата на презентация, документ в електронен формат или аудио-видео материал. За целта би могъл да използва иновативни компютърни технологии като мултимедиен проектор, интерактивна дъска, индивидуални работни станции или таблети, ако обучението се провежда в оборудвана компютърна зала или да споделя текстови и / или видео файлове при електронно обучение [3].

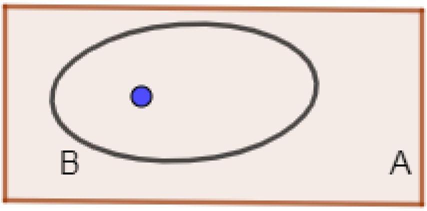
Без значение от техниката на обучаване и използваните технологии, задължително е учащите да получат следните основни теоретични познания по темата:

**1. Въведение в темата.**

Когато се разглежда темата Геометричната вероятност в равнината и пространството, елементарните събития са геометрични обекти като отсечки, окръжности, елипсоиди и др. Решаването на този тип задачи се свежда към случаен избор от подходящи обекти в евклидови пространства със съответната размерност [1].

Понятието геометрична вероятност в равнината се дефинира като отношение на лица на фигури, като една точка се избира произволно от дадена област в равнината [7].

**2. Определение 1.** Дадени са фигурите A и B (Фиг. 1). По случаен начин се избира точка от фигурата B. Вероятността избраната точка да е от фигурата B, не зависи от формата на тази фигура и от това къде тя е разположена върху фигурата A, а само от лицата на двете фигури, и се пресмята по формулата $P = \frac{S(B)}{S(A)}$ [5].




Фиг.1

II. Във **второто ниво на модела** новата тема се обвързва с познати и изучени теми и се задават междупредметни връзки, ако има такива. Целта е обучаваните да осмислят по-лесно новите понятия, като ги свързват с нещо познато. Тъй като това е пасивно ниво, удачно е преподавателят да продължи да използва техниките и технологиите, които е прилагал в първото ниво на модела.

Подходящи връзки с изучени теми са:

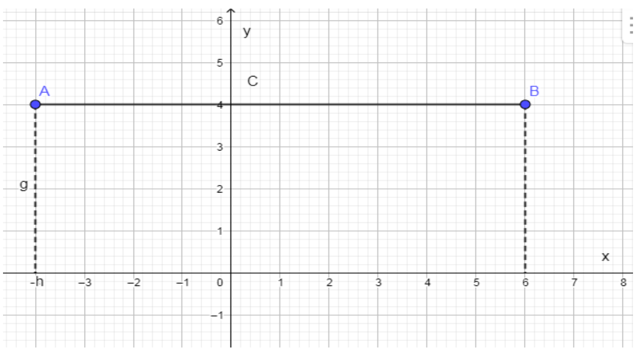
- Пермутации, вариации и комбинации;
- Геометрична вероятност;
- Геометрична вероятност върху права.

III. В **трето ниво на модела** преподаващият представя методи и техники за решаване на конкретни задачи по темата *Геометрична вероятност в равнината и пространството*. Той прилага формули, с които обучаваните разполагат предварително.

Необходимо е това ниво да започне с лесни примери, които имат пряка връзка с вече изучени теми.

**Пример 1.** В правоъгълна координатна система $Oxy$ са дадени точките $A(-4;4)$ и $B(6;4)$. По случаен начин се избира точка от отсечката $AB$ (Фиг.2). Да се намери вероятността тя да лежи в първи квадрант.

***Решение:***




Фиг.2

Отсечката $AB$ пресича ординатната ос в точка $C(0;4)$.

$|AB| = |x_B - x_A| = |6-(-4)| = 10$ м.ед.

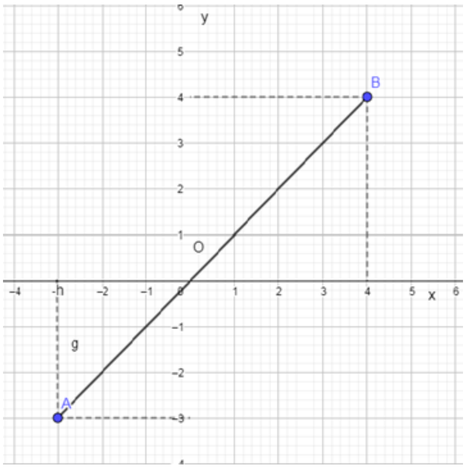
Частта от отсечката $AB$, която лежи в първи квадрант, е отсечката $BC$.

$|BC| = |x_C - x_B| = |6-0| = 6$ м.ед.

Търсената вероятност е $P = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

**Пример 2.** В правоъгълна координатна система $Oxy$ е построена графиката на функцията $y = x$ и върху нея са отблязани точките $A(-3; -3)$ и $B(4; 4)$. По случаен начин се избира точка от отсечката $AB$ (Фиг.3). Да се намери вероятността тя да лежи в трети квадрант.

***Решение:***



Фиг. 3

Дължината на отсечката $AB$ е равна на сбора на дължините на отсечките $OA$ и $OB$.

$$|OA| = \sqrt{(-3-0)^2 + (-3-0)^2} = 3\sqrt{2} \text{ м.ед.}$$

$$|OB| = \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2} \text{ м.ед.}$$

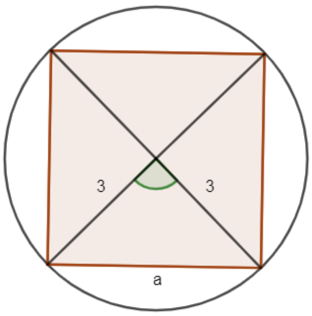
$$\Rightarrow |AB| = |OA| + |OB| = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2} \text{ м.ед.}$$

Частта от отсечката $AB$, която лежи в трети квадрант е $OA$.

$P = \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{3}{7}$.

**Пример 3.** В кръг с радиус 3 см е вписан квадрат (Фиг.4). Да се намери вероятността случайно избрана точка от кръга да лежи във вътрешността на квадрата.

***Решение:*** Търсената вероятност е равна на отношението на лицето на квадрата (благоприятни изходи) към лицето на кръга (всички изходи):




Фиг.4

$$S_o = \pi r^2 = \pi.3^2 = 9\pi\ см^2$$

$$S_k = a^2 = 18\ см^2$$

$$P = \frac{S_k}{S_o} = \frac{18}{9\pi} = \frac{2}{\pi}$$

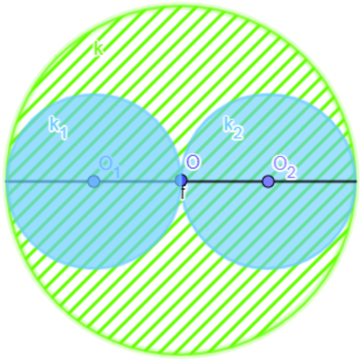
IV. В **четвърто ниво на модела** се дава възможност на учащите да дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от преподавателя. Те предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под негово ръководството и анализират получените резултати. Това също е активно ниво според Пирамидата на ученето [2].

Подходящи за това ниво са следните задачи:

**Задача 1.** Кръговете на Фиг.5 са $k(O;r), k_1(O_1;r_1)$ и $k_2(O_2;r_2)$. Да се намери вероятността случайно избрана точка от кръга $k$ да е от защрихованата му част.

***Решение:***

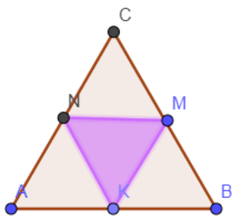
$$r_1 = r, S(k_1) = \pi.r^2$$
$$r_2 = r, S(k_2) = \pi.r^2$$
$$R = 2.r, S(k) = \pi.(2r)^2 = 4.\pi.r^2$$
$$S_z = S(k) - (S(k_1) + S(k_2)) = 2.\pi.r^2$$
$$P = \frac{S_z}{S(k)} = \frac{2.\pi.r^2}{4.\pi.r^2} = \frac{1}{2}.$$




Фиг.5

**Задача 2.** Във вътрешността на $\triangle ABC$ се избира по случаен начин точка $Q$. Да се намери вероятността точка $Q$ да е от вътрешността на триъгълник, върховете на който са среди на страните на $\triangle ABC$ (Фиг.6).

***Решение:***



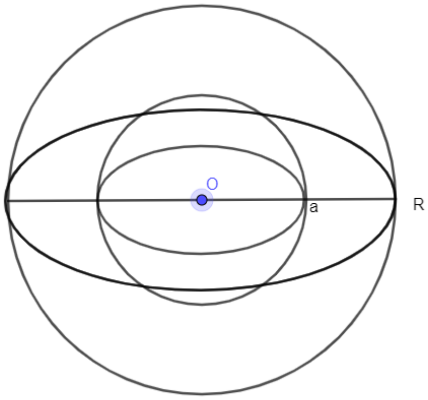

Фиг.6

Нека точките $K, M$и $N$ са съответно среди на страните $AB, BC, CA$ на $\triangle ABC$ Средните отсечки $KM, MN, NK$ разделят $\triangle ABC$ на 4 еднакви триъгълника

$$\Rightarrow P = \frac{S_{\triangle KMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle KMN}}{4.S_{\triangle KMN}} = \frac{1}{4}.$$

**Задача 3.** В сфера с радиус $R$ случайно и независимо една от друга са разположени $N$ точки. Да се намери вероятността, разстоянието от центъра на сферата до най-близката точка да не е по-малко от $a$ , където $0 < a < R$ (Задача от звездната астрономия).

***Решение:*** Предполага се, че в сферата има една точка. Обемът на сферата е $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. Частта от сферата (Фиг.7), в която е допустимо събитието $A$: {разстоянието до центъра да не е по-малко от $a$ } има обем $V_1$



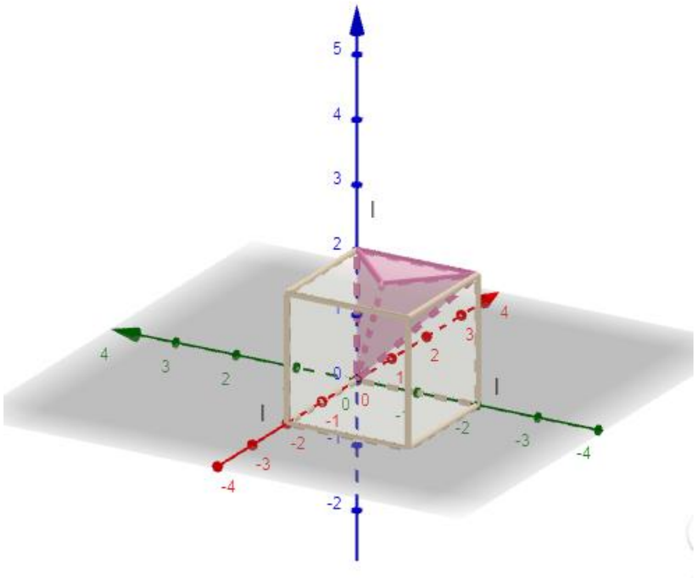

Фиг.7

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - a^3)$.

Следователно, $P(A) = \frac{V_1}{V} = \frac{4\pi(R^3 - a^3)/3}{4\pi R^3/3} = \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3\right]$. Но в сферата са разположени независимо $N$ точки (с равни вероятности за разстояние до т. O). Следователно, вероятността всички точки да са на разстояние не по-малко от $a$ е $P = \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3\right]^N$.

**Задача 4.** Каква е вероятността от три произволно взети отсечки с дължини, не по-големи от $l$, да е възможно да се построи триъгълник?

***Решение:***



Фиг.8

Нека $x, y$ и $z$ са дължините на трите случайно избрани отсечки. Предполага се, че $x \leq y \leq z$. Всяка точка, чиито координати $x, y$ и $z$ удовлетворяват неравенствата $x \leq l, y \leq l, z \leq l$, лежи във вътрешността на куб $T$ със страна $l$ и обем $V_2 = l^3$ (Фиг.8).

От геометрията е известно, че неравенството $x + y > z$ е необходимо условие трите отсечки $x, y$ и $z$ да образуват триъгълник.

Трите неравенства се удовлетворяват едновременно само от координатите на точките на оцветената пирамида $T_1$ от Фиг. 8. Обемът на тази пирамида е $V_1 = \frac{l^3}{12}$. От определението за геометрична вероятност следва, че $P = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{l^3}{12}}{l^3} = \frac{1}{12}$.

V. В **пето ниво на модела** обучаваните решават задачи по темата самостоятелно. Преподавателят заема пасивна роля - отговаря на възникнали въпроси и дава насоки при решаването на задачите. В този етап е важно преподавателят да получи обратна връзка за степента на усвояване на новия материал от обучавание чрез дискусия и анализ на получените отговори. Избраните от обучавателя задачи са подходящи за самостоятелна домашна работа или за работа в екипи. Това ниво е най-ефективното според Пирамидата на ученето. Учащите прилагат на практика наученото и задълбочават нивото на разбиране по съответната тема [3].

Подходящи задачи за самостоятелна и / или екипна работа са следните:

**Задача 1.** Метален проводник с дължина 20 см е сгънат в случайно избрана точка. След това с прегъване на по-дългата част на още 2 места е направена правоъгълна рамка. Да се определи вероятността лицето на получената рамка да не надвишава $21см.^2$

**Задача 2.** В кръг е вписан квадрат. Да се намери вероятността случайно хвърлена топка в кръга да се окаже вътре в квадрата.

**Задача 3.** Върху кълбо е нанесена географска координатна мрежа. Кълбото се хвърля върху равнина. Да се намери вероятността точката на първия допир на кълбото с равнината да се намира между $0^0$ и $90^0$ източна дължина.

**Задача 4.** В равнина са дадени окръжност $K(O,R)$ и един нейн диаметър $CD$. Случайна права от равнината пресича окръжността. Каква е вероятността тази права да пресича диаметъра?

**Задача 5.** В равнината е даден квадрат $Q$, а средите на страните му са върхове на квадрата $Q_1$. Случайна права от равнината пресича квадрата $Q$. Да се намери вероятността тя да пресича и квадрата $Q_1$.

## ИЗВОДИ

Настоящата статия, базирана на Петстепенния модел, предложен от А. Лечева за обучение по математика [3], е подходяща за въвеждане, задълбочаване и разширяване на знанията и уменията на учениците по темата *Геометрична вероятност в равнината и пространството.* Разработеният учебен материал лесно може да се адаптира за провеждане на дистанционно (електронно) обучение.

Интерактивността, заложена в Петстепенния модел, дава възможност за взаимодействие както между преподавателя и обучаваните, така и между самите обучавани в диалогов режим. В учебната стая (традиционна или електронна) могат да се използват методи на обучение, съчетаващи различни иновативни комуникативни технологии.

## БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2022-ФПНО-03, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

## REFERENCES

Bojadjiev L., „Higher Mathematics 4“, Ciela, 1999, ISBN:954-649-232-9 (***Оригинално заглавие:*** Бояджиев Л., *„Висша математика 4”,* Сиела,1999, ISBN:954-649-232-9).

Learning pyramid (October, 2021) https://www.educationcorner.com/the-learning-pyramid.html.

Lecheva, A., A five-level model of teaching mathematics based on constructivism and interactivity (2021), PROCEEDINGS OF UNIVERSITY OF RUSE - 2021, volume 60, book 6.4, pp. 59-64 (***Оригинално заглавие:*** *Петстепенен модел на обучение по математика, базиран на конструктивизма и интерактивността, Научна конференция на Русенски университет (2021),* том 60, книга 6.4, стр. 59-64, ISBN: 2603-4123).

Ministry of Education and Science - *Министерство на образованието и науката*, https://www.mon.bg/.

Paskaleva Z., “Mathematics 9-th grade – general education”, Arhimed, 2018 (***Оригинално заглавие:*** Паскалева З., *„Математика 11 клас – общообразователна подготовка”*, Архимед, 2018, ISBN: 978-954-779-213-5).

Petrova, L., scientific advisors Anna Lecheva and Veselina Evtimova, Theory of probabilities and statistics in the school course in Mathematics (2022), Master degree project, Univercity of Ruse, (***Оригинално заглавие: Теория на вероятностите и статистиката в училищния курс по Математика****,* Дипломен проект, Русенски университет (2022)).

Sugarev Z., “Probability theory”, Science and Art, Sofia, 1974 (***Оригинално заглавие:*** Сугарев З., „*Теория на вероятностите“,* Наука и изкуство, София, 1974).