FRI-2.116-1-ERI-13

DEVELOPMENT OF THE TOPIC PROBABILITY OF A SUM OF COMPATIBLE EVENTS FOR THE TEACHING OF MATHEMATICS IN THE 9TH GRADE [16]

Lidiya Petrova – MSc Student
Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 876 667 168
E-mail: lpetrova@vaprilov-ruse.com

Assist. Prof. Anna Lecheva, PhD
Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 82 888 453
E-mail: alecheva@uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Veselina Evtimova, PhD
Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Phone: +359 82 888 453
E-mail: v.evtimova@gmail.com

Abstract: *This paper presents the Probability of the sum of compatible events. Relevant examples and tasks have been selected to demonstrate the theory behind it. The solutions have been presented analytically and graphically. The topic is part of the module Elements of the probability theory and statistics, included in the compulsory Mathematics curriculum in 9th grade. The presented teaching method contributes to the development of constructive thinking, the ability of expressing thoughts, the ability to clearly and precisely structure knowledge, the ability to communicate with others and self-expression.*

Keywords: *Probability, Probability of a sum of compatible events, Five-level teaching model.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Обучението по математика в 9.клас (***Таблица 1.***) е насочено към овладяване на базисни знания и умения, свързани с постигане на изискванията за резултатите от обучението по учебния предмет Математика и с изграждане на ключови компетентности на ученика.

Очакваните компетентности в края на курса за обучение по *Елементи от теорията на вероятностите и статистиката* са ученикът да:

- ✓ разчита и интерпретира информация, представена с графики, с таблици или с диаграми,
- ✓ умее да пресмята класическа вероятност чрез формулите за пермутации, вариации и комбинации без повторение,
- ✓ знае да пресмята класическа вероятност на сума на съвместими и на несъвместими събития [3].

Въпросът за резултатността на учебния процес е изключително значим в днешната педагогическа психология. Неговото решение е свързано с търсенето и намирането на най-подходящи условия за провеждането на учебния процес при всяка конкретна обстановка.

[16] Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 28 октомври 2022 г. в секция Образование – изследвания и иновации с оригинално заглавие на български език: РАЗРАБОТВАНЕ НА ТЕМАТА ВЕРОЯТНОСТ НА СУМА ОТ СЪВМЕСТИМИ СЪБИТИЯ ЗА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В 9 КЛАС.

Таблица 1. **Учебно съдържаниеза 9.клас на МОН**

Теми	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия
1. Класическа вероятност 1.1. Класическа вероятност. 1.2. Вероятност на сума на несъвместими събития. 1.3. Вероятност на противоположно събитие, на обединение и сечение на събития. 1.4. Вероятност на сума на съвместими събития.	➢ умее да намира сечение, обединение, произведение и допълнение на множества; ➢ знае да пресмята класическа вероятност като отношение на възможности; ➢ умее да пресмята класическа вероятност чрез формулите за пермутации, вариации и комбинации без повторение; ➢ умее да пресмята вероятност на допълнително събитие; ➢ умее да пресмята вероятност на сума на несъвместими събития; ➢ умее да пресмята вероятност на обединение и на сечение на събития.	✓ Съединение без повторение, ✓ пермутации без повторение от n елемента, ✓ вариации без повторение от n елемента k-ти клас, ✓ комбинации без повторение от n елемента k-ти клас,

При обучението основно значение има взаимодействието между учителя и учениците, както и между самите ученици, което ги поставя в активна позиция. Осъществяването на различни дейности в учебния процес води до превръщане на ученика в партньор на преподавателя и повишава неговата мотивация за учене и осъвършенстване. Това се постига чрез прилагането на многообразие от методи, определяни като интерактивни.

Интерактивно базираното обучение е преди всичко диалогово обучение, в процеса на което се осъществява връзка между обучаващия и обучавания, и предполага взаимно разбиране, съвместно решаване на общи, но значими за всеки участник казуси [2].

Петстепенният модел за обучение по Математика е основан на базисните нива в Пирамидата на ученето и включва следните степени:

1. Основни понятия по темата - определения и теореми;
2. Връзки с изучени теми и / или междупредметни връзки;
3. Технология за решаване на задачи по темата;
4. Придобиване на умения - приложение на теорията;
5. Разширяване на уменията - самостоятелна работа / работа в екип.

В **първото ниво** преподавателят дава определения на основните понятия по темата, формулира теореми, твърдения и следствия. Това е пасивно ниво, на което обучаваните навлизат в тематиката.

Във **второто ниво** обучаващият свързва новата тема с познати и изучени теми и задава междупредметни връзки, ако има такива. Целта е учащите да осмислят по-лесно нововъведените понятия, като ги свързват с нещо вече изучено. Това отново е пасивно ниво.

В **третото ниво** преподавателят онагледява методи и демонстрира технологията за решаване на конкретни задачи по темата, използва формули и таблици. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето.

В **четвърто ниво** обучаваните дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от учителя, предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това също е активно ниво.

В **петото ниво** се решават задачи по темата от обучаваните самостоятелно или разделени на екипи. В този етап на метода преподавателят става неактивен участник в процеса на обучение, т.е. отговаря само на възникнали въпроси, дава насоки и предложения, получава обратна връзка (рефлексия) чрез анализиране и дискутиране на получените резултати. Това ниво е най-ефективното за учениците според Пирамидата на учене. На този етап те прилагат на практика усвоения учебен материал.

Темата *Вероятност на сума на съвместими събития* е развита в настоящата публикация съобразно етапите на Петстепенния модел [5].

ИЗЛОЖЕНИЕ

I. В **първото ниво на модела** е задължително преподавателят да въведе учениците в темата, като даде определения на основните понятия, формулира нужните теореми, твърдения и следствия. Тъй като това е пасивно ниво, на което учениците навлизат в тематиката, преподавателят има възможност да използва разнообразни иновативни техники и технологии.

Въз основа на един от основните принципи на конструктивизма, който гласи, че учебникът не е основен източник на информация, преподавателят би могъл да поднесе теоретичния материал под формата на презентация, документ в електронен формат или аудио-видео материал. За целта би могъл да използва иновативни компютърни технологии, ако обучението се провежда в оборудвана компютърна зала или да споделя текстови и / или видео файлове при електронно обучение [2].

Без значение от техниката на преподаване и използваните технологии, задължително е учениците да получат следните основни теоретични познания по темата:

1. Въведение в темата.

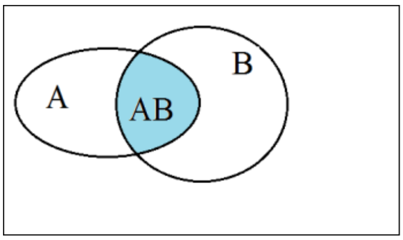
Сума на две събития A и B е събитието, при което се сбъдва поне едно от тези събития (A или B) [6].

Определение 1. Две събития са *съвместими*, ако при настъпването на едното е възможно да настъпи и другото.

Когато събитията A и B са *съвместими*, то $A \cap B \neq \emptyset$ и $A \cup B$ означава или настъпване на A, или настъпване на B, или настъпване и на двете събития [4].

Теорема 1. Ако събитията A и B са съвместими, то вероятността на обединението им е сума от вероятностите на тези събития минус вероятността на сечението им (Фиг.1), т.е.

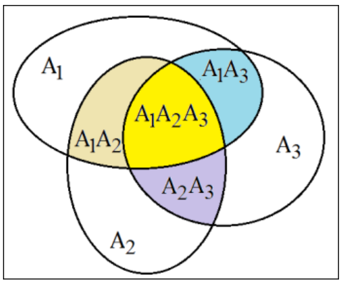
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



Фиг.1

При три произволни събития (Фиг.2) Теорема 1 се променя по следния начин [6]:

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$



Фиг.2

Определение 2. Две събития са *несъвместими*, ако при настъпването на едното е невъзможно да настъпи другото.

Когато събитията A и B са *несъвместими*, то $A \cap B = \emptyset$ и $A \cup B$ означава настъпване или на A, или на B [4].

Теорема 2. Ако събитията A и B са несъвместими, то вероятността на обединението им е сума от вероятностите на тези събития, т.е.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

II. Във **второто ниво на модела** новата тема се свързва с познати и изучени теми и се задават междупредметни връзки, ако има такива. Целта е учениците да разберат по-лесно новите понятия, като ги свържат с нещо познато. Тъй като това е пасивно ниво, удачно е преподавателят да продължи да използва техниките и технологиите, които е прилагал в първото ниво на модела.

Подходящи връзки с изучени теми са:

- Пермутации, вариации и комбинации;
- Събития и техните разновидности;
- Класическа вероятност;
- Основни свойства на вероятностите;
- Вероятност на сума на несъвместими събития;
- Вероятност на противоположно събитие [6].

III. В **трето ниво на модела** преподавателят прилага методи и технологии за решаване на конкретни задачи по темата Пермутации, вариации и комбинации. Той използва формули и показва примери, с които учениците разполагат предварително. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето.

Необходимо е демонстрацията да започне с лесни примери, които имат пряка връзка с вече изучени теми [2].

Пример 1. В една кутия има 4 бели и 6 черни топки. Изваждат се по случаен начин две топки. Да се намери вероятността извадените топки да са:

а) бели;

б) черни;

в) бяла и черна.

Решение: В кутията има общо 10 топки. Две от тях могат да се извадят по $C_{10}^2 = \frac{10.9}{1.2} = 5.9 = 45$ начина, т.е. общият брой на всички елементарни събития е $n = 45$.

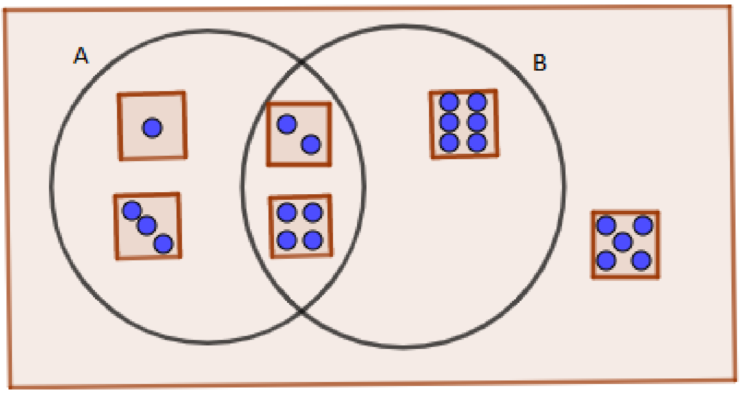
а) Белите топки са 4. Въвежда се събитието A: $\{$извадени са 2 бели топки$\}$. Две бели топки от общо четири могат да се извадят по $C_4^2 = \frac{4.3}{1.2} = 2.3 = 6$ начина, т.е. броят на благоприятните елементарни събития за A е $m = 6$. Тогава $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

б) Черните топки са 6. Въвежда се събитието B: $\{$извадени са 2 черни топки$\}$. Две черни топки от общо шест могат да се извадят по $C_6^2 = \frac{6.5}{1.2} = 3.5 = 15$ начина, т.е. броят на благоприятните елементарни събития за B е $m = 15$. Тогава $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

в) Общият брой на топките в кутията е 10. Въвежда се събитието C: $\{$извадени са 1 бяла и 1 черна топка$\}$. Броят на благоприятните елементарни събития за C е равен на произведението от възможностите да се извади 1 бяла топка от 4 и възможностите да се извади 1 черна топка от 6, т.е. $m = C_4^1 . C_6^1 = 4.6 = 24$. Тогава $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.

Пример 2. Извършва се опит – хвърляне на правилен зар. Разглеждат се събитията A: $\{$падат се по-малко от 5 точки$\}$ и B: $\{$падат се четен брой точки$\}$ (Фиг.3). Като се използват диаграмите на Ойлер-Вен, да се намери вероятността на обединението и на сечението на събитията A и B.

Решение:



Фиг.3

Множеството от всички елементарни събития е $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n = 6$.

Множествата от благоприятните елементарни събития за A и B са съответно $A = \{1,2,3,4\}$ и $B = \{2,4,6\}$.

Обединението на събития A и B е $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$. Броят на благоприятните елементарни събития за $A \cup B$ е $m_1 = 5 \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{m_1}{n} = \frac{5}{6}$.

Сечението на събития A и B е $A \cap B = \{2,4\}$. Броят на благоприятните елементарни събития за $A \cap B$ е $m_2 = 2 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{m_2}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ [6].

Пример 3. В една кутия има 8 бели и 12 черни топки. Изваждат се по случаен начин три топки. Да се намери вероятността извадените топки да са:

а) бели;

б) черни;

в) от един и същи цвят.

Решение: В кутията има общо 20 топки. Три от тях могат да се извадят по $C_{20}^3 = \frac{20.19.18}{1.2.3} = 1140$ начина, т.е. $n = 1140$.

а) Белите топки са 8. Въвежда се събитието A: {извадени са 3 бели топки}. Три бели топки от общо 8 може да се извадят по $C_8^3 = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$ начина, т.е. броят на благоприятните елементарни събития е $m = 56$. Тогава $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$.

б) Черните топки са 12. Въвежда се събитието B: {извадени са 3 черни топки }. Три черни топки от общо 12 може да се извадят по $C_{12}^3 = \frac{12.11.10}{1.2.3} = 220$ начина, т.е. броят на благоприятните елементарни събития е $m = 220$. Тогава $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{220}{1140} = \frac{11}{57}$.

в) Въвежда се събитието C: {извадените топки са от един и същи цвят}. Събитието C се получава като обединение на събития A и B.

Тогава $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{56}{1140} + \frac{220}{1140} = \frac{276}{1140} = \frac{23}{95}$.

IV. В **четвърто ниво на модела** се дава възможност на учениците да дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от учителя. Те предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това също е активно ниво според Пирамидата на ученето [2].

Следните задачи са подходящи за това ниво на обучение:

Задача 1. От тесте с 52 карти се изтегля една карта. Изобразете графично множеството от всички елементарни събития и намерете вероятността изтеглената карта да е:

а) шестица или поп;

б) шестица или купа [1].

Решение:

а) A: {картата е шестица (6)}

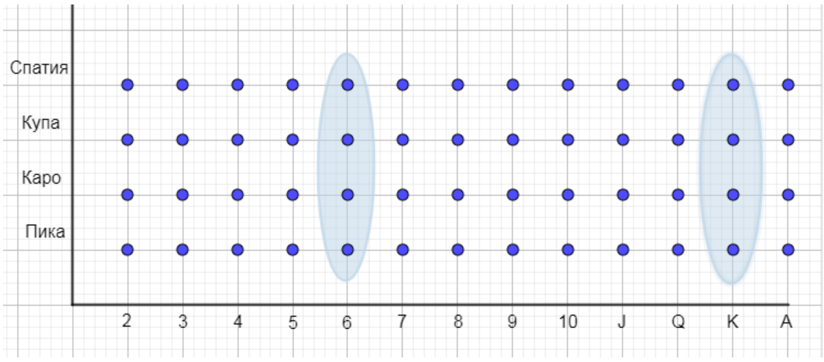
B: {картата е поп (K)}

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B$: {картата е шестица или поп}

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$; $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$; $P(A \cap B) = 0$; $P(A \cup B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$,

тъй като $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, (Фиг.4).



Фиг.4

б) A: {картата е шестица (6)}

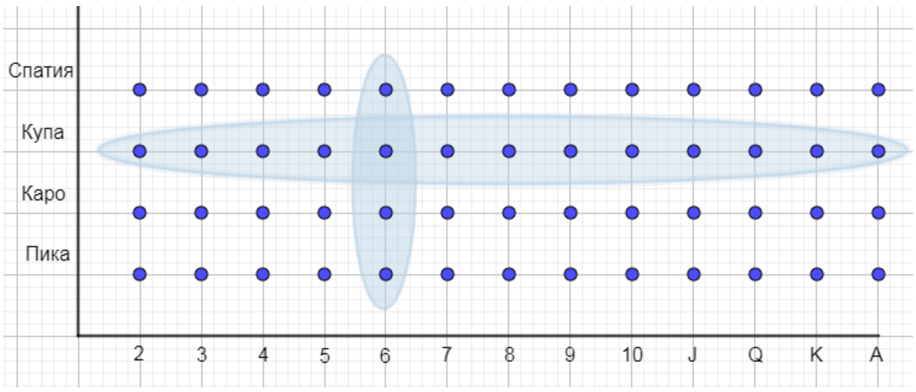
B: {картата е купа (♥)}

$A \cap B$: {картата е шестица купа (6♥)}

$A \cup B$:{картата е шестица или купа}

$P(A) = \frac{4}{52}$; $P(B) = \frac{13}{52}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$; $P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$,

тъй като $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, (Фиг.5).



Фиг.5

Задача 2. В голяма група студенти 25% говорят испански, 50% говорят английски, 20% говорят и двата езика. Да се намери вероятността произволно избран студент да говори поне един от двата езика.

Решение:

A: {студентът говори испански}, $P(A) = 0{,}25$.

B: {студентът говори английски}, $P(B) = 0{,}5$.

$A \cap B$: {студентът говори и двата езика}, $P(A \cap B) = 0{,}2$.

По теоремата за събиране на вероятности

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}25 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}55$ [6].

Задача 3. Извършва се опит – хвърляне на два зара. Каква е вероятността да се паднат 4 точки на поне един от заровете?

Решение:

A: {на първия зар се падат 4 точки}, $P(A) = \frac{1}{6}$,

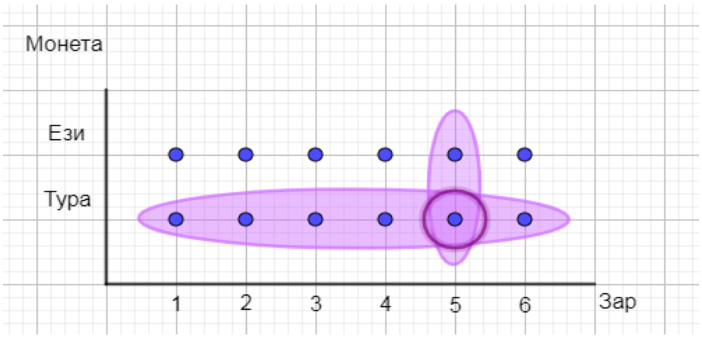
B: {на втория зар се падат 4 точки}, $P(B) = \frac{1}{6}$,

$A \cap B$: { падат се 4 точки на поне един от заровете}, $P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$ [6].

Задача 4. Хвърлят се едновременно правилни монета и зар. Да се изобрази графично множеството от всички елементарни събития и да се намери вероятността да се падне или петица на зара, или тура на монетата, или петица на зара и тура на монетата .

Решение:



Фиг.6

A: {на монетата се пада тура}, $P(A) = \frac{1}{2}$,

B: {на зара се пада петица}, $P(B) = \frac{1}{6}$,

$A \cap B$: {на монетата се пада тура, а на зара се пада петица },

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$,

$A \cup B$: {или на монетата се пада тура, или на зара се пада петица, или и двете},

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$ (Фиг.6).

V. В **пето ниво на модела** учениците решават задачи по темата самостоятелно. Преподавателят заема пасивна роля - отговаря на възникнали въпроси и дава насоки при решаването на задачите. В този етап е важно учителят да получи обратна връзка за степента на усвояване на новия материал чрез дискусия и анализ на получените отговори и решенията на задачите. Избраните от учителя задачи са подходящи за самостоятелна домашна работа или за работа в екипи. Това ниво е най-ефективното според Пирамидата на ученето. Учениците прилагат на практика наученото и задълбочават нивото на разбиране по съответната тема [5].

Подходящи задачи за самостоятелна и / или екипна работа са следните:

Задача 1. От тесте с 52 карти се изтегля една от тях. Изобразете графично множеството от всички елементарни събития и намерете вероятността изтеглената карта да е каро или асо.

Задача 2. От тесте с 52 карти се изтегля една от тях. Изобразете графично множеството от всички елементарни събития и намерете вероятността изтеглената карта да е червена или фигура (вале, дама, поп).

Задача 3. От тесте с 52 карти се изтегля една от тях. Изобразете графично множеството от всички елементарни събития и намерете вероятността изтеглената карта да е черна или петица.

Задача 4. Хвърлят се два правилни зара. Намерете вероятността поне на единия зар да се паднат точки, кратни на 3.

Задача 5. Хвърлят се два правилни зара. Намерете вероятността поне на единия зар да се паднат четен брой точки.

ИЗВОДИ

Настоящата публикация, в която е приложен Петстепенният модел за обучение по математика, предложен от А. Лечева [2], е подходяща за въвеждане, задълбочаване и разширяване на знанията и уменията на учениците по темата *Вероятност на сума от съвместими събития*. Предложените задачи в различните нива на модела могат да се използват директно за провеждане на часове по темата както при традиционно, така и при дистанционно (електронно) обучение.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2022-ФПНО-03, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Bojadjiev L., „Higher Mathematics 4“, Ciela, 1999, ISBN: 954-649-232-9 (***Оригинално заглавие:*** Бояджиев Л., *„Висша математика 4”,* Сиела,1999, ISBN:954-649-232-9).

Lecheva, A., *A five-level model of teaching mathematics based on constructivism and interactivity*, PROCEEDINGS OF UNIVERSITY OF RUSE - 2021, volume 60, book 6.4, pp. 59-64 (***Оригинално заглавие:*** *Петстепенен модел на обучение по математика, базиран на конструктивизма и интерактивността*), Научна конференция на Русенски университет (2021), том 60, книга 6.4, стр. 59-64, ISBN: 2603-4123.

Ministry of Education and Science - *Министерство на образованието и науката*, https://www.mon.bg/.

Paskaleva Z., “Mathematics 9-th grade – general education”, Arhimed, 2018, (***Оригинално заглавие:*** Паскалева З., *„Математика 9 клас – общообразователна подготовка”*, Архимед, 2018).

Petrova, L., scientific advisors Anna Lecheva and Veselina Evtimova, Theory of probabilities and statistics in the school course in Mathematics (2022), Master degree project, Univercity of Ruse, (***Оригинално заглавие:*** *Теория на вероятностите и статистиката в училищния курс по Математика,* Дипломен проект, Русенски университет (2022)).

Sugarev Z., “Probability theory”, Science and Art, Sofia, 1974 (***Оригинално заглавие:*** Сугарев З., „*Теория на вероятностите“,* Наука и изкуство, София, 1974).