FRI-2.116-1-ERI-17

# EXTREMAL PROBLEMS IN GEOMETRY OR HOW SIGNIFICANT IS THE CHOICE OF THE PARAMETERS [20]

**Dimitar Rosenov Chaparov**
Applied Mathematics Student
Sofia University "St. Kliment Ohridski"
E-mail: dim.chaparov@gmail.com

**Assoc. Prof. Julia Chaparova, PhD**
Department of Mathematics
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: jchaparova@uni-ruse.bg

***Abstract:*** *The paper deals with finding extremes for geometric models that could arise in geometric optics, instruments design, construction, shipping, etc. The essentials of such kind of problems are among the set of geometric objects to choose one whose particular element (segment, angle, area) is minimal or maximal. The key role in the investigation is the choice of the parameter with respect to which the particular element has evaluated. It is interesting to note that the choice of the parameter is not unique and often there is no reason in choosing it. Generally speaking, if the corresponding function that evaluates the particular element with respect to a parameter is too complicated for extremes examination it is better to choose another parameter. The most efficient (according to the authors) solutions are presented to some examples as well as other choices of the parameters are commented in subsequent remarks since it is not initially known which one of the parameters will bring to the efficient (or possible) solution.*

***Keywords:*** *Geometric models, Finding of extremes, Parameterization.*

## ВЪВЕДЕНИЕ

Важен раздел на приложната математика е свързан със задачи за намиране на ектремуми. При голяма част от процесите и явленията в икономиката, биологията, производството на инструменти, естествените науки, техниката, теория на управлението е необходимо да се определят онези стойности на параметрите, при които е налице най-благоприятната ситуация. Много често тези процеси и явления могат да се моделират с математически задачи, при които се търси най-малка или най-голяма стойност на дадена величина. Когато тези модели могат да се интерпретират геометрично, те могат да бъдат изучени със средствата на геометрията и математическия анализ. Поради своята значимост за практиката разделът Геометрични модели е включен в профилираната подготовка по математика на учениците от 12 клас (Galabova D., Siderova M., 2021), (Lozanov C., Vitanov T., Nedevski P., Stoimenova E., 2002). В настоящата работа са разгледани примерни екстремални задачи в геометрията. До подобни задачи може да се стигне чрез моделиране в геометричната оптика, при проектирането на инструменти, в строителството, в корабоплаването и др. (Zapryanov Z., Dimovski I., Stanilov G., Ganchev G., Koleva V., 1987), (Paskalev G., 1998), (Minorskii, V., 1977).

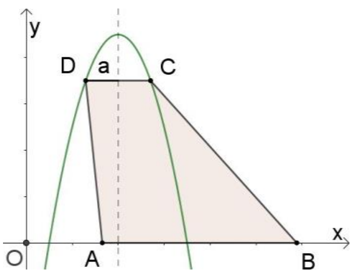
Същността на екстремалните задачи в геометрията се състои в това измежду даден клас геометрични обекти да се намери онзи, за който даден елемент (отсечка, ъгъл, лице) е най-голям или най-малък. Ключова роля в изследването е изборът на параметър, чрез който се пресмята дадения елемент. След определяне на допустимите стойности за параметъра се пристъпва към намиране екстремалната стойност на съответната функция. Следва да се отбележи, че изборът на параметър съвсем не е еднозначен и често няма конкретна причина за този избор. Общо може да се каже, че ако при един избор на параметър съответната функция за изследване за екстремуми е твърде сложна, по-добре да се опита с друг избор на параметър.

[20] Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 28 октомври 2022 г. в секция Образование – изследвания и иновации с оригинално заглавие на български език: ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ В ГЕОМЕТРИЯТА ИЛИ КОЛКО Е ВАЖЕН ИЗБОРЪТ НА ПАРАМЕТРИТЕ.

За разгледаните в изложението примерни задачи са представени най-ефективните (според авторите) решения. В забележки след това са коментирани и други избори на параметри, тъй като отнапред не е ясно кой точно ще доведе до най-ефективното (и възможно) решение.

## ИЗЛОЖЕНИЕ

Задача 1. В първи квадрант върху параболата $y = -x^2 + 8x - 7$ са взети точки $C$ и $D$, а точките $A$ и $B$ лежат върху абсцисната ос, така че отсечката $AB$ е три пъти по-дълга от отсечката $CD$ и фигурата $ABCD$ е трапец. Да се определи максималното лице на трапеца.




Решение. Дадената парабола пресича абсцисната ос при $x = 1$ и $x = 7$, а абсцисата на върха й е $x = 4$. Тук ще използваме симетрия спрямо оста на параболата и фактът, че тази ос е перпендикулярна на абсцисната ос. От условието $CD \parallel Ox$ следва, че оста на параболата е симетрала на отсечката $CD$.

Без ограничение на общността нека $D$ е разположена отляво на оста. За параметър $a$ избираме разстоянието от $D$ до оста на параболата. Ясно е, че $0 < a < 3$, абсцисите на $D$ и $C$ са съответно $x_D = 4 - a, x_C = 4 + a$, дължината на $CD$ е $2a$, а дължината на $AB$ е $6a$. Освен това височината на трапеца е равна на ординатата на $D$ (и на $C$) $y_D = 9 - a^2$. Така намираме лицето на трапеца

$$S_{ABCD} = \frac{|AB| + |CD|}{2}.y_D = 4a(9 - a^2)$$

Максималната му стойност се получава в критична точка на функцията $f(a) = 9a - a^3$ при $0 < a < 3$. От $f'(a) = 3(3 - a^2)$ определяме локалния максимум на $f(a)$ при $a = \sqrt{3}$. Накрая заключаваме, че максималната стойност на $S_{ABCD}$ е $24\sqrt{3}$ ед$^2$.□

**Забележка**. Друго решение, което не използва симетрията относно оста на параболата, може да бъде следното. Избираме за параметър абсцисата на $D$ (или на $C$). Означаваме я с $a$, $1 < a < 4$. По този начин $D$ има координати $D(a, -a^2 + 8a - 7)$. Тъй като $CD \parallel Ox$ ординатата на $C$ е отново $-a^2 + 8a - 7$ (което е и височината на трапеца), а абсцисата на $C$ определяме от условието, че $C$ лежи на параболата, т.е.

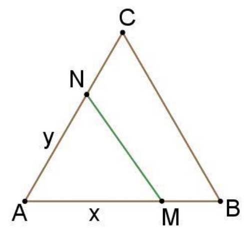
$$y_C = -a^2 + 8a - 7 = -x_C^2 + 8x_C - 7 \iff a^2 - x_C^2 = 8(a - x_C) \Leftrightarrow a + x_C = 8 \text{ при } a \neq x_C$$

Така дължината на $CD$ е $8 - 2a$, дължината на $AB$ е $3(8 - 2a)$, а лицето на трапеца е

$$S_{ABCD} = 2(8 - 2a)(-a^2 + 8a - 7)$$

Максималната му стойност в интервала $(1, 4)$ е свързана с локалния максимум на функцията $g(a) = (4 - a)(-a^2 + 8a - 7)$ при $a = 4 - \sqrt{3}$ и $\max S_{ABCD} = 24\sqrt{3}$ ед$^2$.

**Задача 2**. Даден е равностранен триъгълник $ABC$ със страна 1 и отсечка $MN$ ($M$ лежи върху страната $AB$, а $N$ – върху страната $AC$), която разделя триъгълника на две равнолицеви части. Да се намерят положенията на точките $M$ и $N$, при които отсечката $MN$ има най-малка дължина.




**Решение**. Означаваме с $x$ и $y$ дължините на $AM$ и $AN$ съответно, $0 < x < 1, 0 < y < 1$. От една страна лицето на $\triangle AMN$ е $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ед$^2$, а от друга – $S_{AMN} = \frac{1}{2}xy\sin 60° = xy\frac{\sqrt{3}}{4}$. Следователно $xy = \frac{1}{2}$. От косинусова теорема за $\triangle AMN$ и от елементарното неравенство $x^2 + y^2 \geq 2xy$ имаме

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60° = x^2 + y^2 - xy \geq 2xy - xy = xy = \frac{1}{2}$$

По този начин показахме, че $MN \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ за всички $0 < x < 1, 0 < y < 1$, за които $xy = \frac{1}{2}$. В частност при $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\triangle AMN$ е равностранен и $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следователно най-малката дължина на отсечката $MN$ е $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и тя се постига, когато $MN \parallel AB$. □

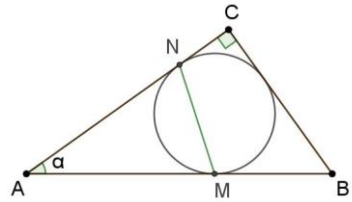
**Забележка**. В горното решение намерихме минималната дължина на $MN$ като получихме оценка отдолу за $MN^2$ и след това показахме, че тази оценка се достига при определен избор на точките $M$ и $N$, което е отговорът на задачата. Друг начин за намиране най-малката дължина на $MN$ е чрез производна на функция. Както по-горе, $MN^2 = x^2 + y^2 - xy$. От условието $xy = \frac{1}{2}$ следва, че $y = \frac{1}{2x}$ . По този начин $MN^2 = x^2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2}$. Тъй като $f(x) = \sqrt{x}$ е монотонно растяща функция, то най-малката дължина на $MN$ се постига в минимума на функцията $g(x) = x^2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2}$ при $x \in (0, 1)$. От

$$g'(x) = \frac{4x^4 - 1}{2x^3} = \frac{(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)}{2x^3}$$

стигаме до отговора $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Задача 3**. Даден е правоъгълен триъгълник $ABC$ с $\sphericalangle C = 90°$ и хипотенуза $AB$, равна на 1. С $M$ и $N$ са означени допирните точки на вписаната в триъгълника окръжност със страните $AB$ и $AC$ съответно. Намерете най-голямата дължина на отсечката $MN$.

Решение. Означаваме $\sphericalangle CAB = \alpha$. Тогава $BC = \sin\alpha$, $AC = \cos\alpha$, $AM = AN = \frac{AB+AC-BC}{2} = \frac{1+\cos\alpha-\sin\alpha}{2}$ и от косинусова теорема за $\triangle AMN$ получаваме




$$MN^2 = 2\left(\frac{1+\cos\alpha-\sin\alpha}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1+\cos\alpha-\sin\alpha}{2}\right)^2 \cos\alpha$$

Така

$$MN^2 = 2\left(\frac{1+\cos\alpha-\sin\alpha}{2}\right)^2 (1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha-\sin\alpha)^2(1-\cos\alpha)$$

и след повдигане на квадрат имаме

$$MN^2 = (1+\cos\alpha-\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = (1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$$

откъдето

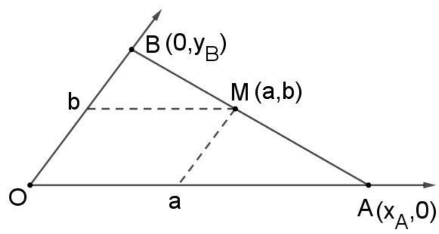
$$MN^2 = (1-\sin\alpha)(1-\cos^2\alpha) = (1-\sin\alpha)\sin^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^3\alpha$$

Най-голямата дължина на отсечката $MN$ можем да намерим чрез изследване за екстремуми функцията $f(x) = x^2 - x^3$, където $x = \sin\alpha$. От това че $\alpha$ е остър ъгъл следва, че $\sin\alpha \in (0,1)$. За производната имаме $f'(x) = 2x - 3x^2$, за която $x = 2/3$ е нула и е локален максимум за $f(x)$. По този начин $\max MN^2 = f_{max}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ и понеже $g(x) = \sqrt{x}$ е монотонно растяща функция заключаваме, че $\max MN = 2\sqrt{3}/9$. □

**Забележка**. В предложеното решение за параметър бе избран $\sphericalangle CAB = \alpha$. Възможни са и други решения, при които параметърът е линеен елемент, например радиусът $r$ на вписаната в триъгълника окръжност. Изразът за $MN^2$ обаче е твърде сложен за изследване.

**Задача 4**. Даден е ъгъл $AOB$ и точка $M$ – вътрешна за ъгъла. Да се намери най-малкия сбор от дължините на $OA$ и $OB$, ако $AB$ е произволна секуща през $M$.

**Решение**. Разглеждаме афинна координатна система с начало $O$, абсцисна ос $OA$ и ординатна ос $OB$. Нека координатите на $A$, $B$ и $M$ са съответно $A(x_A, 0)$, $B(0, y_B)$ и $M(a, b)$, $x_A, y_B, a, b > 0$. Ясно е, че $x_A > a$, иначе правата $AM$ няма да пресече лъча $OB$.




Уравнението на правата $AM$ е

$$AM: \ \frac{x-a}{x_A-a} = \frac{y-b}{-b}$$

или $AM: \ -b(x-a) = (x_A-a)(y-b)$. Понеже точка $B$ лежи на правата $AM$ имаме $ab = (x_A-a)(y_B-b) \quad \Leftrightarrow \quad y_B = b + \frac{ab}{x_A-a}$

Тогава сборът от дължините на $OA$ и $OB$ е

$$OA + OB = x_A + y_B = x_A + \ b + \frac{ab}{x_A-a}$$

Разглеждаме функцията $f(x) = x + \ b + \frac{ab}{x-a}$ за $x = x_A > a$. За производната ѝ имаме $f'(x) = \frac{x^2-2ax-a(b-a)}{(x-a)^2}$. Нулите на производната са решения на квадратното уравнение $x^2 - 2ax - a(b-a) = 0$, което има два реални корена. От условието $x > a$ следва, че $x_A = a + \sqrt{ab}$ и при тази стойност минимумът на $OA + OB$ е $a + b + 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$. □

**Задача 5**. Разглеждаме всевъзможните триъгълници $ABC$ в равнината $Oxy$, за които $\sphericalangle C = 90°$, $A(0,4)$, точката $B$ лежи върху параболата $y = 4x - x^2$, точката $C(x_c, 0)$ лежи върху абсцисата и $x_c \in [0,4]$. Да се определят координатите на $B$, така че лицето на $\triangle ABC$ да бъде максимално.

**Решение**. Правата $BC$ е определена от дадената точка $C(x_c, \ 0)$ и ортогоналния вектор $\overrightarrow{AC}(x_c, -4)$. Уравнението ѝ е

$$BC: x_c(x - x_c) - 4y = 0$$

Координатите на $B$ намираме като пресечем параболата $y = 4x - x^2$ с правата $BC$. По този начин стигаме до системата

$$\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ x_c(x - x_c) - 4y = 0 \end{cases}$$

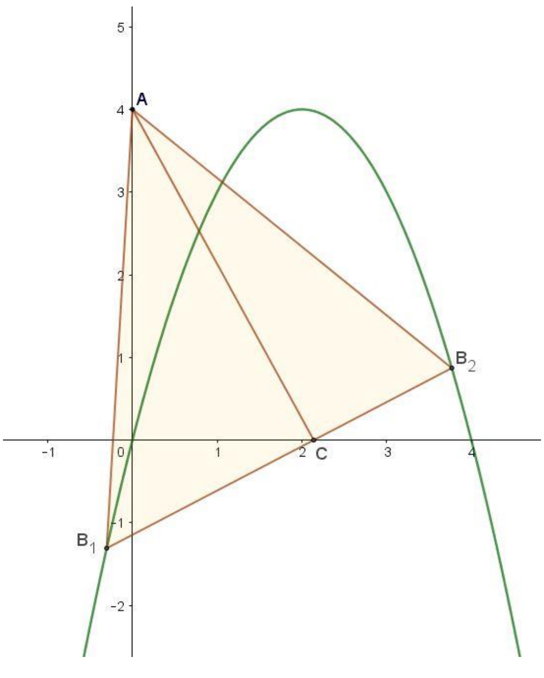
за която

$$4x^2 + x(x_c - 16) - x_c^2 = 0$$

Да отбележим, че за всяко $x_c \in [0,4]$ съществуват две точки $B$, удовлетворяващи горните условия. Техните абсциси са съответно

$$x_{B_1} = \frac{16 - x_c - \sqrt{(16-x_c)^2 + 16x_c^2}}{8}$$

$$x_{B_2} = \frac{16 - x_c + \sqrt{(16-x_c)^2 + 16x_c^2}}{8}$$




Тъй като трите точки $B_1, B_2$ и $C$ лежат на една права и $C$ е между $B_1$ и $B_2$, то дължината на $B_1B_2$ е по-голяма или равна на всяка от дължините на $B_1C$ и $B_2C$,

$$|B_1C| \le |B_1B_2|, \quad |B_2C| \le |B_1B_2|$$

Да определим максималната дължина на $B_1B_2$. Имаме

$$|B_1B_2|^2 = \left(x_{B_2} - x_{B_1}\right)^2 + \left(y_{B_2} - y_{B_1}\right)^2$$
$$= \left(x_{B_2} - x_{B_1}\right)^2 + \left(4x_{B_2} - x_{B_2}^2 - \left(4x_{B_1} - x_{B_1}^2\right)\right)^2$$
$$= \left(x_{B_2} - x_{B_1}\right)^2 \left(1 + \left(4 - \left(x_{B_2} + x_{B_1}\right)\right)^2\right)$$

Като използваме формулите за $x_{B_2}$ и $x_{B_1}$ стигаме до

$$|B_1B_2|^2 = \frac{1}{16^2}(17x_c^2 - 32x_c + 16^2).(16 + x_c^2)$$

Разглеждаме функцията $f(x) = (17x^2 - 32x + 16^2).(16 + x^2)$. Търсим най-голямата й стойност в затворения интервал $[0, 4]$. Пресмятаме производната

$$f'(x) = 4(17x^3 - 24x^2 + 264x - 128)$$

Лесно се вижда, че тя е растяща функция (наистина функцията $g(x) = 17x^3 - 24x^2 + 264x - 128$ има производна $g'(x) = 3(17x^2 - 16x + 88) > 0$ навсякъде). Това означава, че $f'(x)$ има единствен реален корен. От $f'(0) < 0$ и $f'(1) > 0$ следва, че коренът на $f'(x)$ лежи в интервала $(0, 1)$ и това е точка на локален минимум за $f(x)$. По този начин най-голямата стойност на дължината на $B_1B_2$ се достига при $x_c = 0$ или при $x_c = 4$. С непосредствена проверка се установява, че при $x_c = 4$ дължината на $B_1B_2$ има най-голяма стойност и освен това при $x_c = 4$ точка $C$ съвпада с точка $B_2$.

По този начин показахме, че максималната дължина на катета $CB_1 \equiv CB$ се достига при $x_c = 4$. От друга страна дължината на катета $AC$ , $|AC| = \sqrt{x_c^2 + 4}$ , също е максимална при $x_c = 4$. Това означава, че лицето на правоъгълния триъгълник $ABC$ е максимално при $x_c = 4$. В този случай координатите на точките са съответно $C \equiv B_2(4,0)$ и $B \equiv B_1(-1, -5)$.□

**Забележка**. Вижда се, че представеното решение е нетипично, т.е. отнапред трябва да се установи отговора на задачата чрез използване на софтуер за визуализиране като GeoGebra например и след това да се тръгне към определяне максималната дължина на отсечката $B_1B_2$. Ако читателят опита експлицитно да определи дължините на отсечките $CB_1$ и $CB_2$ за произволна стойност на $x_c \in (0,4)$ и след това да максимизира лицето на получените правоъгълни триъгълници, ще срещне значителни изчислителни трудности, които могат да се преодолеят само със софтуер (например WolframAlpha).

Друг подход за решаване на задачата, който намираме за по-естествен, е да се въведе нов параметър. Например нека това е абсцисата $b$ на точката върху параболата. Така $B(b, 4b - b^2)$. Определяме $x_c$ като функция на $b$ чрез построяване на окръжност с център $S(b/2, 2 + 2b - b^2/2)$ (средата на $AB$) и радиус $r = SA = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \left(-2 + 2b - \frac{b^2}{2}\right)^2}$ . Тази окръжност пресича абсцисата в точката $C$. Не е трудно да се стигне до квадратното уравнение за $x_c$

$$x_c^2 - b.x_c + 4(4b - b^2) = 0$$

което има два реални корена

$$x_c = \frac{b \pm \sqrt{17b^2 - 64b}}{2}$$

дефинирани при $b \in (-\infty, 0] \cup [64/17, +\infty)$. Условието $x_c \in [0, 4]$ ограничава интервала до $b \in [-1,0] \cup [64/17, 4]$. По този начин

при $b \in [-1,0]$ $\quad x_c = \frac{b+\sqrt{17b^2-64b}}{2}$

а при $b \in [64/17, 4]$ $\quad x_c = \frac{b-\sqrt{17b^2-64b}}{2}$ или $x_c = \frac{b+\sqrt{17b^2-64b}}{2}$

Лицето на $\triangle ABC$ намираме чрез векторното произведение на $\overrightarrow{AB}(b, -(b-2)^2)$ и $\overrightarrow{AC}(x_c, -4)$. По този начин

1) $2S_{\triangle ABC} = (b-2)^2 x_c - 4b$ при $b \in [-1,0]$ и $x_c = (b + \sqrt{17b^2 - 64b})/2$
2) $2S_{\triangle ABC} = 4b - (b-2)^2 x_c$ при $b \in [64/17, 4]$ и $x_c = (b + \sqrt{17b^2 - 64b})/2$
3) $2S_{\triangle ABC} = 4b - (b-2)^2 x_c$ при $b \in [64/17, 4]$ и $x_c = (b - \sqrt{17b^2 - 64b})/2$

В първия случай въвеждаме функцията

$$f(b) = (b-2)^2 x_c - 4b$$

и търсим най-голямата й стойност в интервала $[-1,0]$. За производната й имаме

$$f'(b) = 2(b-2)x_c + (b-2)^2 x_c' - 4$$

Тъй като $x_c' = (1 + (17b - 32)/\sqrt{17b^2 - 64b})/2 < 0$ за $b \in [-1,0]$, то $f(b)$ е строго намаляваща функция в този интервал и максимумът й се достига при $b = -1$, което дава отговора на задачата. За съжаление в останалите два случая, въпреки че $x_c'$ има постоянен знак при $b \in [64/17, 4]$, изводът че $4b - (b-2)^2 x_c$ е монотонна функция на $b$ в интервала $[64/17, 4]$, може да се направи само с помощта на софтуер.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работата представихме различни идеи за параметризация на геометрични модели и за изследване на получената екстремална задача.

## REFERENCES

Galabova D., Siderova M., 2021. Mathematics 12th grade Specialized training. Sofia: VEDI Publishing (*Оригинално заглавие: Гълъбова Д., Сидерова М., 2021. Математика 12 клас Профилирана подготовка. София: Издателство Веди*)

Chakaryan K., Siderov P., 1995. Candidate student competitions in Mathematics. Sofia: St. Kliment Ohridski University press (*Оригинално заглавие: Чакърян К., Сидеров Пл., 1995. Кандидатстудентски конкурси по математика. София: Университетско издателство „Св. Климент Охридски”*)

Zapryanov Z., Dimovski I., Stanilov G., Ganchev G., Koleva V., 1987. Mathematics textbook for elective courses in the eleventh grade of secondary school. Sofia: National education State publishing house (*Оригинално заглавие:Запрянов З., Димовски И., Станилов Г., Ганчев Г., Колева В., 1987. Математика учебно помагало за свободно избираема подготовка в 11 клас на ЕСПУ. София: Държавно издателство „Народна просвета”* )

Minorskii, V., 1977. Collection of tasks in higher mathematics. Moskva: Science publishing (*Оригинално заглавие на руски език: Минорский В. 1977. Сборник задач по высшей математике. Москва: Издателство „Наука”)*

Paskalev G. 1998. Collection of tasks in Mathematics for candidate students. Sofia: Regaliya 6 press (*Оригинално заглавие: Паскалев Г. 1998. Сборник от задачи по математика за кандидат-студенти. София: Регалия 6*)

Lozanov C., Vitanov T., Nedevski P., Stoimenova E., 2002. Mathematics for 12th grade Specialized training. Sofia: Anubis Publishing (*Оригинално заглавие: Лозанов Ч., Витанов Т., Недевски П., Стоименова Е., 2002. Математика за 12 клас Профилирана подготовка. София: Издателска къща „Анубис”*)