

FRI-2.116-1-ERI-04

TEACHING SYSTEM EQUATIONS BY USING GEOGEBRA⁴

Teodora Lachezarova Georgieva, MSc

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse "Angel Kanchev"

Tel: +359 887365881

E-mail: teodora.georgieva14@abv.bg

Pr. Assist. Prof. Ralitsa Vasileva-Ivanova, PhD

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse "Angel Kanchev"

Tel: +359 884109719

E-mail: rivanova@uni-ruse.bg

Abstract: Innovative educational technologies are a necessity dictated by the dynamic development of society. Their usage implies creation of new learning environment with such an organization that stimulates and motivates the students, making the lesson more dynamic, provoking interest, which is the basis of their activity.

Systems of equations are an important part of algebra, which is studied in the 9th form of general education in mathematics. Systems of linear equations with two variables and systems of quadratic equations with two variables are represented in the training course. Students learning several methods of solving systems of equations - by substitution, by addition, as well as how to graphically represent the solution to systems of linear equations. This learning material may not be of interest to each student; therefore, some great help definitely includes innovative technologies such as GeoGebra.

This present paper introduces the platform GeoGebra for solving graphically system equations. Modern teaching resources can support the work of teachers, especially when keeping the student's attention is a difficult task. Teachers can visualize the answers of system equations using GeoGebra. New technologies are a particular interest to students, and if they are adequately included in education, they can only support it.

Keywords: GeoGebra, graphics, system equations, new technologies.

ВЪВЕДЕНИЕ

Политиката на Европейската комисия е ориентирана към осигуряване на качествено и модерно образование, което изправя Европейския съюз пред нови предизвикателства. Стремелът към адекватност със съвременните реалности предполага преход на образованието към Компетентностен подход. Основната му задача става подготовката на компетентни специалисти, т.е. на хора със знания за различните страни на живота, с навици за творческо боравене с интелектуалния и професионалния инструментариум, способни да взаимодействат с други хора в различни ситуации с цел постигане на конструктивно взаимодействие. Основните характеристики на Компетентностния подход са: интегрирано междупредметно взаимодействие; практическа насоченост на обучението; прилагане на иновативни подходи и практики в процеса на преподаване и учене. Използването на иновативни образователни технологии предполага създаване на нова учебна среда с такава организация, която да стимулира и мотивира участниците, да провокира интерес, който е в основата на активността им. В тази връзка *разчупването* на урока като основна форма на педагогическо общуване, е повече от необходимо (Кюркчийска, 2020).

⁴ Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 28 октомври 2022 г. в секция Образование – изследвания и иновации с оригинално заглавие на български език: ПРЕПОДАВАНЕ НА СИСТЕМИ УРАВНЕНИЯ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА GEOGEBRA.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Системите уравнения са важна част от алгебрата, която се изучава в IX клас на общообразователната подготовка по математика. В курса на обучение са застъпени системи линейни уравнения с две неизвестни и системи уравнения от втора степен с две неизвестни. Учениците се научават да решават системи уравнения по няколко начина: графично, чрез заместване, чрез събиране и чрез полагане.

Системите уравнения могат да се използват за решаване на ежедневни проблеми, например:

- ❖ *изчисляване на най-добрия маршрут за тренировка* – чрез създаване на математически израз, който взема под внимание разстоянието и скоростта за всеки участък от маршрута.
- ❖ *избор на най-добрата сделка по кредит* - чрез системите уравнения се отчитат: продължителността на кредита, лихвения процент, месечната вноска и др., на базата на последвалите изчисления може да се направи най-добрият избор.
- ❖ *избор на работа* – вземат се предвид заплащане, бонуси към възнаграждението и комисионни, с тези стойности се съставя система уравнения, с помощта на която всеки може да сравни и избере подходяща за себе си работа.

Освен традиционните методи за решаване на СЛУ, в учебните часове могат да се включат и иновативни технологии за преподаване, чрез които да бъде засилен интереса на учениците. Те могат активно да участват в процеса на обучение и сами да работят със съвременни ресурси за обучение.

Платформи, които могат да се внедрят в учебните часове по математика и са подходящи за визуализация са GeoGebra, Graspable Math, Desmos и др. Освен за обучение, иновативните технологии помагат и при оценяването на учениците, особено ако се осъществява онлайн. Подходящи платформи за създаване на онлайн тестове са Google Forms, Microsoft Forms, SmarTest и др. Ако учениците имат нужда от допълнителни обяснения по материала, който изучават могат да се възползват от платформи за самостоятелно обучение като Уча.се, Кан Академия и др.

GeoGebra е добър инструмент за визуализация на решенията на системите уравнения. Учениците могат сами да въведат уравненията на системата в платформата, като след въвеждане на уравнението, неговата графика автоматично се начертава. Когато всички уравнения са въведени, ясно могат да се видят пресечните точки на техните графики. Полезно за учениците е първо да решат системата сами, а след това да проверят своето решение с помощта на GeoGebra.

GeoGebra е динамичен математически софтуер, който може да се използва във всички етапи на образованието. Той обединява геометрия, алгебра, електронни таблици, графики, статистика и смятане в едно. Платформата предоставя множество възможности като е особено подходяща за демонстрация и визуализация на математически понятия, които по принцип могат да звучат и изглеждат твърде абстрактно на учениците. Пред учениците могат да се създават 2D и 3D чертежи, които да са динамични, например правоъгълен паралелепипед, чиято разбивка те да наблюдават, съществува и опция, при която се задава чертежът да се наблюдава като 3D обект, за целта учениците трябва да използват 3D очила. Като нещо ново и различно, което обикновено свързват с почивка, а не с учене, това би привлякло техния интерес. Освен чисто математическите функции на софтуера, той притежава и възможности за онлайн обучение като създаване на уроци и упражнения, които учениците да разглеждат и решават, както и създаване на тестове, които могат да включват различни материали, подготвени с платформата (www.geogebra.org).

$$\underline{1 \text{ зад.}} \begin{cases} 3x + 4(x - 3) = 3(2y - 3) - 37 \\ 3y + 2(x - 4) = 5(y + 2) - 28 \end{cases}$$

(Паскалев, Алашка, 2018)

Решение:

$$\begin{cases} 3x + 4x - 12 = 6y - 9 - 37 \\ 3y + 2x - 8 = 5y + 10 - 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 12 = 6y - 46 \\ 2x + 3y - 8 = 5y - 18 \end{cases}$$

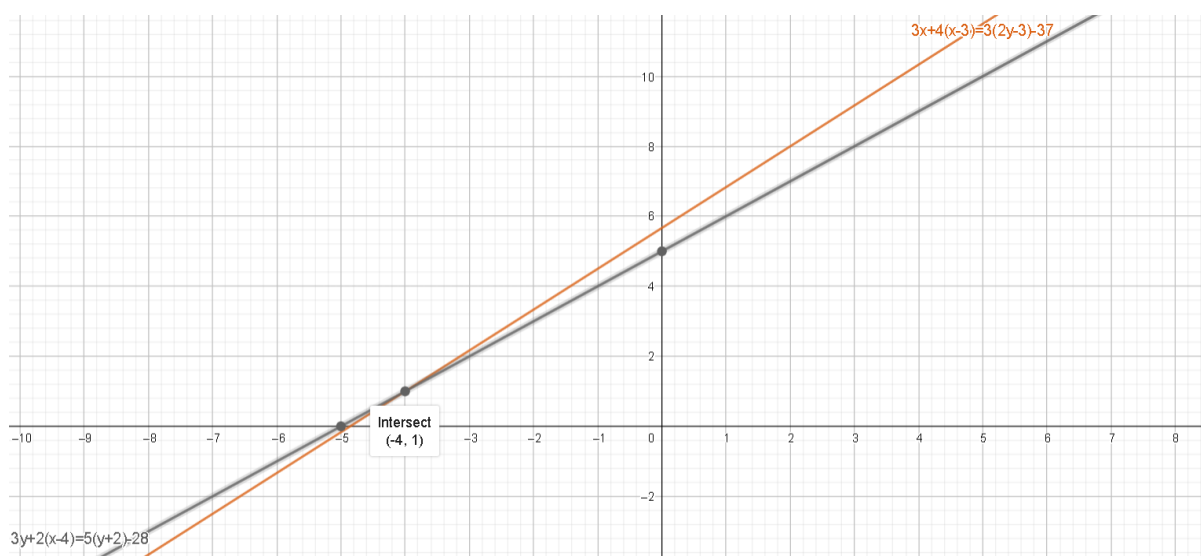
$$\begin{cases} 7x - 6y = -46 + 12 \\ 2x + 3y - 5y = -18 + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 6y = -34 \\ 2x - 2y = -10 / \cdot (-3) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 7x - 6y = -34 \\ -6x + 6y = 30 \end{cases}$$

$$x = -4, y = 1$$

На фиг. 1 са представени графиките на двете уравнения на дадената система. Пресечната им точка е с координати $(-4; 1)$, това е и решението на системата.



Фиг.1

$$\underline{2 \text{ зад.}} \begin{cases} 6x - y = 11 \\ 12x - 2y - 22 = 0 \end{cases}$$

(Паскалев, Алашка, 2018)

Решение:

Винаги, когато е възможно, системата трябва да се опрости преди по-нататъшни сметки, например в случая второто уравнение на системата се разделя на 2.

$$\begin{cases} 6x - y = 11 \\ 6x - y = 11 \end{cases}$$

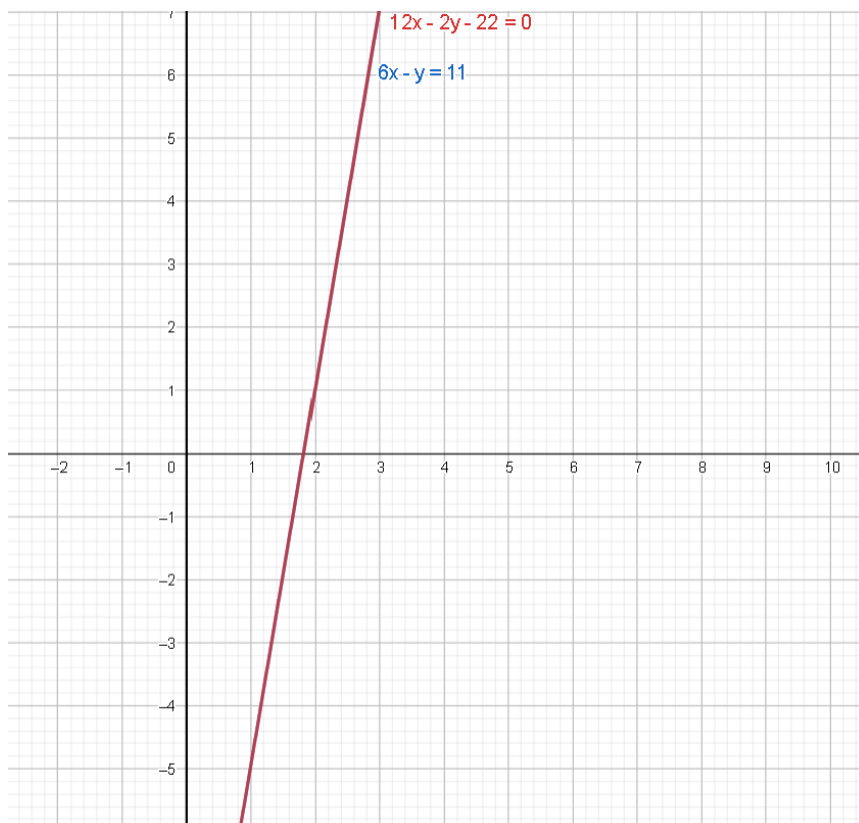
След разделянето на второто уравнение се получава система, която съдържа две напълно еднакви уравнения, тоест те носят еднаква информация, остава уравнението:

$$6x - y = 11$$

Давайки различни стойности на неизвестното x , се получават съответни стойности на другото неизвестно y . Тоест за всяка стойност на едното неизвестно съществува съответна стойност на другото неизвестно, т.е. системата има безброй много решения (Фиг. 2).

Записва се наредена двойка за решението на системата като чрез едното неизвестно се изрази другото:

$$6x - y = 11 \rightarrow -y = 11 - 6x / (-1) \rightarrow y = 6x - 11 \Rightarrow (x; y = 6x - 11).$$



Фиг. 2

Графиките на двете уравнения на системата се застъпват, тоест всички решения, които принадлежат на първото уравнение на системата принадлежат и на второто уравнение на системата. От това следва, че системата има безброй много решения.

$$\underline{3 \text{ зад.}} \begin{cases} x + y = 7 \\ (x - 2)(y - 2) = 2 \end{cases}$$

(Паскалев, Алашка, 2018)

Решение:

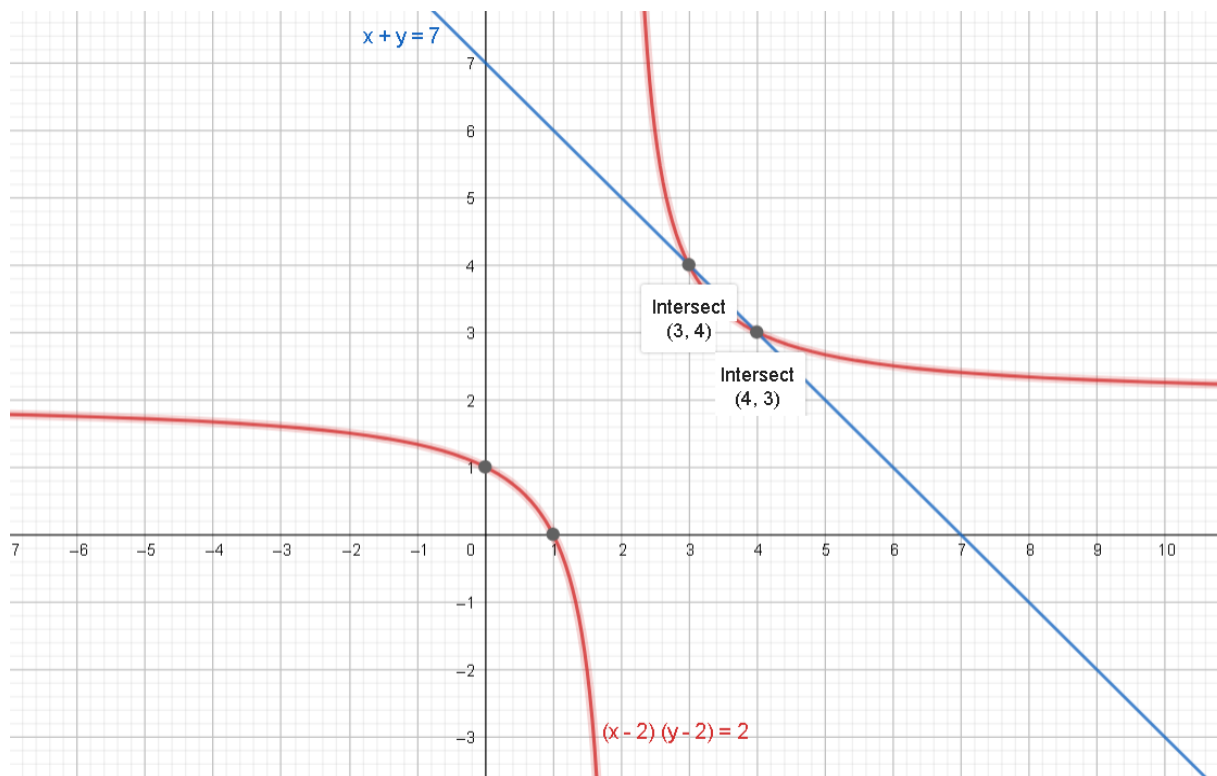
$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = 7 \rightarrow x = 7 - y \\ (x - 2)(y - 2) = 2 \end{cases} \\ & (7 - y - 2)(y - 2) = 2 \\ & (5 - y)(y - 2) = 2 \\ & 5y - 10 - y^2 + 2y - 2 = 0 \\ & -y^2 + 7y - 12 = 0 / \cdot (-1) \\ & y^2 - 7y + 12 = 0 \end{aligned}$$

$$D = 1$$

$$y_{1/2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$y_1 = 4 \rightarrow x_1 = 7 - 4 = 3$$

$$y_2 = 3 \rightarrow x_2 = 7 - 3 = 4$$



Фиг. 3

В тази система едното уравнение е от първа степен, а другото от втора степен. Графиките им имат две общи точки, откъдето следва, че решението на системата се състои от две наредени двойки $(3; 4)$ и $(4; 3)$.

4 зад.
$$\begin{cases} x^2 - (2y - 1)^2 = 0 \\ x^2 - 5y^2 - 2y = 1 \end{cases}$$

(Тонов, Шаркова, 2018)

Решение:

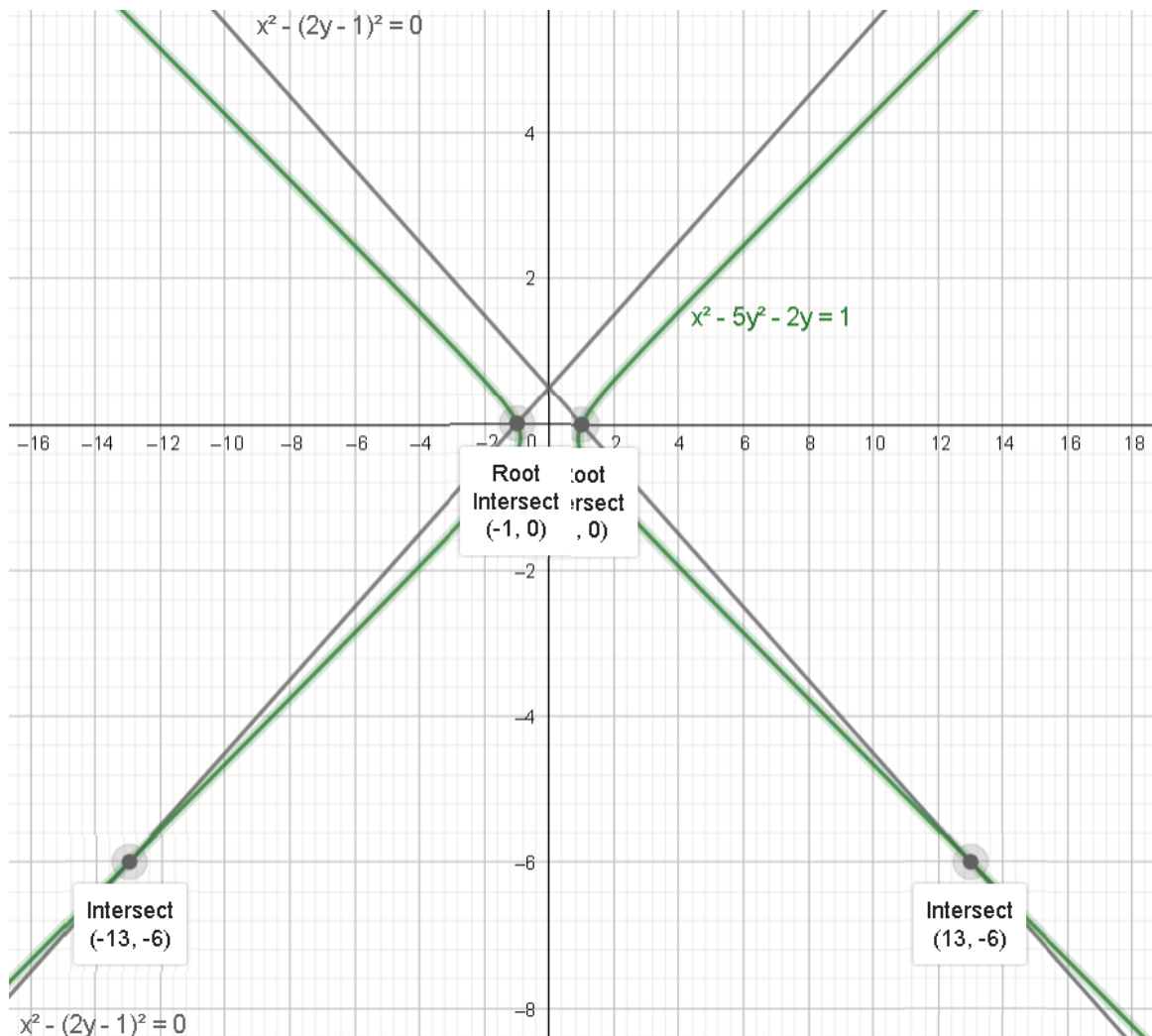
За да се реши дадената система първото ѝ уравнение се разлага чрез формула за съкратено умножение:

$$\begin{cases} (x - 2y + 1)(x + 2y - 1) = 0 \\ x^2 - 5y^2 - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 2y - 1 \\ x^2 - 5y^2 - 2y = 1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \rightarrow x = 1 - 2y \\ x^2 - 5y^2 - 2y = 1 \end{cases} \\ & (2y - 1)^2 - 5y^2 - 2y - 1 = 0 \quad (1 - 2y)^2 - 5y^2 - 2y = 1 \quad 4y^2 - 4y + 1 - 5y^2 - 2y - 1 = 0 \\ & 2y - 1 = 0 \quad 1 - 4y + 4y^2 - 5y^2 - 2y - 1 = 0 \\ & -y^2 - 6y = 0 \quad -y^2 - 6y = 0 \\ & y^2 + 6y = 0 \quad y^2 + 6y = 0 \\ & y(y + 6) = 0 \quad y(y + 6) = 0 \\ & y_1 = 0 \quad y_2 = -6 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = -6 \\ & y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \quad y_3 = 0 \rightarrow x_3 = 1 - 2 \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$

$$y_2 = -6 \rightarrow x_2 = 2 \cdot (-6) - 1 = -13 \quad y_4 = -6 \rightarrow x_4 = 1 - 2 \cdot (-6) = 13$$

В тази система и двете уравнения са от втора степен. Графиките им четири общи точки (Фиг. 4), откъдето следва, че решението на системата се състои от четири наредени двойки $(-1; 0)$, $(-13; -6)$, $(1; 0)$ и $(13; -6)$.



Фиг. 4

5 зад.

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

(Тонов, Шаркова, 2018)

Решение:

В тази система едното уравнение е хомогенно. Проверява се, че двойката $(0; 0)$ е решение на системата, и първото уравнение на системата се разделя на y^2 ($y \neq 0$).

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Полага се: $\frac{x}{y} = u$

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

$$D = 1$$

$$u_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$u_1 = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = 2 \rightarrow x = 2y$$

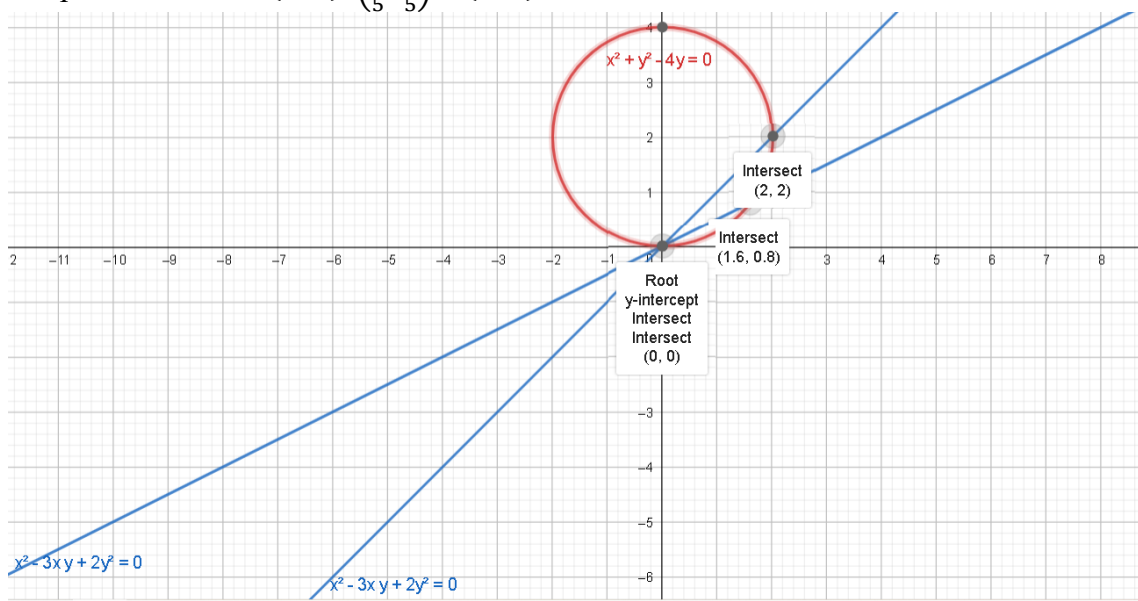
$$u_2 = 1 \rightarrow \frac{x}{y} = 1 \rightarrow x = y$$

Дадената система е равносилна на обединението на двете системи:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4y^2 + y^2 - 4y &= 0 & y^2 + y^2 - 4y &= 0 \\ 5y^2 - 4y &= 0 & 2y^2 - 4y &= 0 \div 2 \\ y(5y - 4) &= 0 & y^2 - 2y &= 0 \\ y_1 = 0 \rightarrow x_1 &= 0 & y(y - 2) &= 0 \\ y_2 = \frac{4}{5} \rightarrow x_2 &= 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} & y_3 = 0 \rightarrow x_3 &= 0 \\ & & y_4 = 2 \rightarrow x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Наредената двойка $(0; 0)$ е решение на системата, както се вижда и от графиката. Освен тази пресечна точка съществуват още две (Фиг. 5), откъдето решението на системата се състои от три наредени двойки $(0; 0)$, $(\frac{8}{5}; \frac{4}{5})$ и $(2; 2)$.



Фиг. 5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разгледаните съвременни ресурси за обучение могат да подпомогнат работата на учителите, особено когато е необходимо да бъде привлечено вниманието на учениците. Новите технологии представляват голям интерес за учениците и ако бъдат адекватно включени в обучението могат единствено да го подпомогнат.

Този учебен материал може да не представлява голям интерес за всеки ученик, тогава на помощ идват иновативните технологии като GeoGebra, които могат да бъдат включени в учебната среда. Всеки ученик може да използва дадените платформи през лично устройство, по някакъв начин чрез електронните устройства отново може да се достигне дори и до най-незаинтересованите ученици.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2022-ФПНО-03, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Паскалев Г., Алашка М., (2018), Учебник по математика за 9 клас, Архимед

Тонов И., Шаркова И., Христова М., Капралова Д., Златилов В. (2018), Учебник по математика за 9 клас, Регалия 6

Кюркчийска, В. (2020), Иновативни образователни технологии в условия на приобщаващо образование, Шуменски университет „Епископ Константин Преславски “

www.geogebra.org