

FRI-2G.307-1-ERI-01

TECHNOLOGICAL MODEL OF A LESSON ON THE TOPIC "COLLECTION AND MULTIPLICATION OF POSSIBILITIES"¹

Pr. Assist. Prof. Desislava Georgieva, PhD

Department of Algebra and Geometry,

Faculty of Mathematics and Informatics

St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Bulgaria

Tel.: +359 887 244 498

E-mail: d.georgieva@ts.uni-vt.bg

Abstract: Combinatorics is an important branch of mathematics because it has applications in various aspects of modern life, including computer science, engineering, and statistics. This paper presents an innovative approach to developing a technological model for a combinatorics lesson, focusing on the topic "Addition and Multiplication of Possibilities". The model combines traditional teaching methods with the use of modern tools and resources. Through it, students have the opportunity to explore combinatorial concepts in a more interesting and engaging way by solving real-world problems. Emphasis is placed on developing critical thinking while encouraging active participation and experiential learning. The goal is to increase students' interest and motivation in learning mathematics and its applications in the real world.

Keywords: Education, Application of Combinatorics, Technology map, Lesson plan, Reflection, Opportunities, Combination without replacement, Graph-tree.

ВЪВЕДЕНИЕ

Комбинаториката представлява мощен инструмент, който позволява съчетаването на разнообразни идеи в рамките на една задача, като така позволява интерпретация на въпроси от области като аритметика, геометрия, биология, химия и др. (Bankov et al. 2017; Bankov, K. et al., 2022; Gleiman M., Varga T. 1983; Stoilkova, Ts. 2015; Zapryanov Z., Marinkova M. 2008). След анализа на събраните данни по метода интервю с учители по математика се установява, че раздела свързан с комбинаториката е доста различен от останалите знания и те изпитват затруднение относно начина на преподаване. Голяма част от учениците също срещат затруднения.

Затова е разработен *Технологичен модел* за обучение по темата „Събиране и умножение на възможности“, който може лесно, ефективно и непосредствено да се приложи в учебния процес с цел повишаване на успеваемостта. Този модел включва две ключови инструментални средства: *Технологична карта* и *План-схема на урока*.

ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Конструирание на *Технологична карта*

Технологична карта (Табл. 1) включва: образователни параметри; организационни компоненти и рефлексия. Като полезен инструмент, който помага на учителите да планират и организират уроците си по ефективен начин, тя има множество преимущества. Предоставя ясна и последователна структура на урока и идентифицира необходимите ресурси и материали, които трябва да бъдат подготвени предварително. Това позволява на учителите да подготвят всичко необходимо преди урока, осигурявайки плавното му протичане и избягване на ненужни прекъсвания. Технологичната карта на урока служи като инструмент за рефлексия и подобрене, като позволява на учителите да прегледат и оценят своите уроци след тяхното провеждане. Това спомага за постоянното усъвършенстване на учебния процес.

¹ Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 27 октомври 2023 г. в секция Образование – изследвания и иновации с оригинално заглавие на български език: ТЕХНОЛОГИЧЕН МОДЕЛ НА УРОК НА ТЕМА „СЪБИРАНЕ И УМНОЖЕНИЕ НА ВЪЗМОЖНОСТИ“.

Освен това, тя може да бъде лесно споделена с други учители, което позволява обмен на идеи и сътрудничество.

Създаването на *Технологична карта* за описание на урок изисква планиране и организация, които преминават през няколко стъпки:

1. Определяне на **целите на урока**: Какво трябва да научат учениците до края на урока? Тези цели трябва да бъдат конкретни, измерими, постижими, релевантни и ограничени във времето.

2. Избор на **ресурсите и материалите**: Какви ресурси и материали ще са необходими? Това може да включва учебници, работни листове, видеоклипове, интерактивни игри и др.

3. Планиране на **стъпките на урока** и подробно описание на **дейностите**, които ще се проведат по време на урока.

4. Определяне на **методите за оценяване**: Как ще се оцени дали са постигнати целите на урока? Това може да включва участие в беседата, тестове, проекти, презентации, и др.

5. **Преглед на урока**: След като са планирани всички аспекти на урока, се проверява дали е организиран, последователен и подходящ за конкретните ученици.

Разработена е технологична карта, по модел на Д. Гълъбова (Galabova, 2008) на въвеждащ урок в *Комбинаториката* за 8. клас, като тя може да бъде адаптирана и разширена според конкретните нужди на класа и учениците.

Технологична карта „Събиране и умножение на възможности“

1. ОБРАЗОВАТЕЛНИ ПАРАМЕТРИ: Учебната програма за 8. клас	2. ОБЛАСТ НА КОМПЕТЕНТНОСТ: Елементи от вероятности и статистика	3. РАЗДЕЛ: Основни комбинаторни понятия
ТЕМА на урока	<i>Събиране и умножение на възможности</i>	
ВИД на урока	Урок за нови знания	
ЦЕЛИ на урока	Формиране на компетентности като очаквани резултати от обучението по темата	Нови понятия в урока
Развиване на компетентности на ученика	Ученикът: - разпознава и съставя <i>съединения</i> (възможности); - прилага правилото за събиране на съединения; - прилага правилото за умножение на съединения	<i>възможности, клас, съединение без повторение, граф-дърво</i>
Учебни методи	Методи в традиционното обучение	Методи за активно и интерактивно обучение с ИКТ
	дискусия, наблюдение, сравнение, абстрахиране, обобщение, групов работ, индивидуална работ, контрол, преценка, упражнение	- компютърна урочна презентация; - софтуер за онлайн бяла дъска – OpenBoard
Учебни ресурси	учебник, тетрадка, химикалка, маркер	- интерактивна бяла дъска; - интернет връзка; - компютри или смартфони; - работ с електронно четим/ електронен учебник.
Интегративни връзки	Вътрешнопредметни връзки	Междупредметни връзки

	пермутации, вариации, комбинации, статистика	информационни технологии, биология
2. ОРГАНИЗАЦИОННИ КОМПОНЕНТИ		
2.1. Събуждане на интереса	Дейност на учителя - посочва пример от живота и поставя проблемна ситуация.	Дейности на учениците - участват в беседата; - изказват примери.
2.2. Запознаване с нови знания и умения	- диктува определения за: съединение, клас; - съобщава правилата за: събиране и умножение на съединения; - запознава с видове съединения; - запознава със структурата на граф-дърво.	- изслушват учителя; - търсят информация в интернет - назовават различни възможности; - опитват се сами да формулират определения; - записват определенията, които учителя диктува.
2.3. Дейности за затвърдяване и разширяване на компетенциите по темата	- задава за решаване на система от задачи с нарастваща сложност - предлага допълнителни задачи от сборник.	- прилагат новите знания; - решават задачи и тестове; - изброяват свои варианти за възможности.
3. РЕФЛЕКСИЯ		
3.1. Рефлексия над дейността на учениците	Дейност на учителя - подбира и предлага система от задачи; - наблюдава; - контролира; - коригира; - изказва положителна обратна връзка.	Дейности на учениците - преценяват дали могат да моделират с множества и съединения; - решават кратък електронен тест по темата; - преценяват резултатите си, пропуските и затрудненията.
3.2. Личностна и интелектуална рефлексия над резултатите	- задава ключови въпроси от урока; - преосмисля използваните методи и дейности; - преценява дали учениците проявяват интерес към темата; - търси причини за пропуските в краткия тест; - набелязва дейности за преодоляване на пропуските.	- преценяват дали проявяват интерес към темата; - преценяват могат ли да възпроизвеждат знанията от урока и да ги прилагат; - самооценяват резултатите си; - съпоставят с резултатите на съучениците си; - съставят проект по темата - граф-дърво.

2. Организационни компоненти на урока

2.1. Събуждане на интереса на учениците (актуализация на опорни знания, житейски опит за новото и мотивация)

Учителят може да привлече вниманието на учениците като започне с житейски пример: „Всеки от нас в ежедневието си е изправен пред много и различни възможности, дори не осъзнаваме колко много избори правим. Един от тях е облеклото за деня. Погледнете на екрана един пример (показва на мултимедия предварително подготвени изображения – Фиг. 1). Започваме с избора на блуза, след това преминаваме през избора на панталон и накрая завършваме с избора на обувки. От схемата виждаме, че има ... различни варианта за обличане. Но ако имаме 20 тениски, 10 панталона и 5 чифта обувки, по колко различни начина можем да ги съчетаем? Ще ни отнеме ли много време, за да съставим всички различни варианти. Как да намерим техния брой, без да ги изписваме, ще разберете в днешния урок. Започваме един нов раздел. *Комбинаториката* е сред най-старите и силно

развити дялове на математиката. Задачите, които ще решаваме, са от заобикалящата ни действителност: игри със зарове, карти, табла, шах и т.н.“.

2.2. Запознаване с нови знания и умения

Учителят съобщава заглавието на урока и го записва на дъската „**Събиране и умножение на възможности**“. Посредством беседа той актуализира знанията за *множества* и *елементи на множества*. С цел да пести време, което да използва за примери и преоткриване на знанията, диктува определенията като точки от плана на урока.

1. Съединения – групи или редици от елементи на едно или няколко крайни множества, които удовлетворяват определени условия.

а) *съединения без повторения* – съставени са от различни елементи;

б) *съединения с повторения* – някои от елементите се повтарят;

В зависимост от това дали има значение подредбата на елементите в съединенията съществуват:

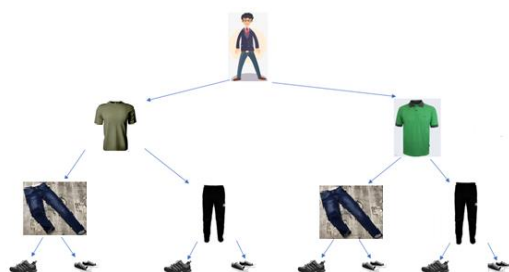
в) *наредени съединения (пермутации, вариации)* – подреждането на елементите в тях е от значение;

г) *ненаредени съединения (комбинации)* – подреждането на елементите в тях не е от значение;

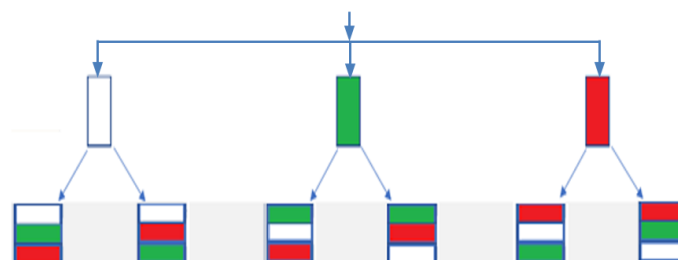
в) *клас на съединение* – броят на елементите, участващи в съединението.

„Тази година ние с вас ще изучаваме само *съединения без повторения*. Нека се съсредоточим конкретно към днешната тема за събиране и умножение на възможности и да разгледаме първа задача.“ За да събуди любопитството на обучаваните съобщава само термините *пермутации*, *вариации* и *комбинации* и казва, че ще бъдат изучени през следващите часове, като се използват знанията от настоящия учебен час.

Задача 1. Колко различни знамена могат да се образуват от цветовете *бяло, зелено, червено*? Учителят: „Единия вариант е да започнем да изреждаме цветовете, но така може да се объркаме, а вторият е да направим структура на граф-дърво (Фиг. 2.)“.



Фиг. 1. Умножение на възможности



Фиг. 2. Граф-дърво към Задача 1

Учителят обяснява на учениците каква е структурата на граф-дърво, как да определят класа на съединенията. В този случай те са от 3^{-ти} клас (съдържат три цвята). След преброяване на получените трикоълори, се установява, че отговорът на задачата е 6 знамена. Осъществява междупредметна връзка с географията като поставя задача да потърсят в интернет кои държави имат знамена, съставени от тези цветове и да ги групират в подмножества – хоризонтално разположени: България, Унгария; хоризонтални с орнаменти: Иран, Таджикистан, Чечения; вертикално разположени: Италия, Мексико; с вертикални и хоризонтални ивици: Мадагаскар, Оман.

Обучаващият поставя следващата задача:

Задача 2. Иван искал да си купи за рождения ден лаптоп **или** таблет. Влязъл в магазина и там имало 4 модела на лаптопи и 6 модела на планшети. Колко различни начина за избор има Иван?

Решение: Едното множество има 4 елемента, а другото 6 елемента, което прави общо 10 елемента. Покупката на Иван е само една и той трябва да избере едно устройство от тези 10, така че броят на начините е: $4 + 6 = 10$ начина.

Учителят обяснява, че в задачата е използвано правилото за събиране на възможности. А терминът който се използва в науката за назоваване на възможности е *съединение*. След това диктува следващата точка-определение.

2. Правило за събиране на възможности (съединения): Ако един обект ***a*** може да бъде избран по ***m*** начина, а друг обект ***b*** – по ***n*** начина, **независими** от начините за избиране на ***a***, то кой да е от обектите ***a*** или ***b*** може да бъде избран по ***m + n*** начина.

Веднага след записване на правилото се предлага още един пример за събиране на възможности.

Задача 3. Алекс избира една играчка за подарък за рождения ден на по-малкото си братче. В магазина имало 3 пъзела, 2 камиона и 8 коли. По колко различни начина Алекс може да избере подаръка? Решението се свързва със записаното научно правило: „Един обект (пъзел) може да бъде избран по 3 начина, друг елемент – камион по 2 начина, независими от начините за избиране на пъзел, а третия обект по 8 начина, независими от останалите, то една играчка може да бъде избрана по $3 + 2 + 8 = 13$ начина.“

Учителят диктува следващата точка-определение, а учениците записват.

3. Правило за умножение на възможности: Ако един обект ***a*** може да бъде избран по ***m*** начина и при всеки избор на ***a*** обектът ***b*** може да бъде избран по ***n*** начина, то изборът на наредена двойка (***a; b***) може да стане по ***m . n*** начина.

Следват няколко примера за умножение на възможности.

Задача 4. Ресторант предлага в обедното си меню 3 вида супи, 4 основни ястия и 2 вида десерт. По колко начина клиент може да си състави меню, включващо:

а) три различни ястия; б) две различни ястия?

Решение: а) Прави се анализ на задачата, в който трябва да се уточни, че за всяка супа може да се избере всяко от основните ястия, което прави $3 \cdot 4 = 12$. За всяко от тези 12 различни менюта от първо и второ, може да се добави някой от двата десерта, което прави $12 \cdot 2 = 24$. Това е и крайният отговор на задачата – 24 различни начина за избор на обедно меню, съдържащо първо, второ и трето.

Обучаващият насочва вниманието към мнемоничното правило, че когато в изречението имаме съюза „или“ се използва **правилото за събиране на възможности** (задача 2.), а когато има „и“ се използва правилото за умножение (задача 4. а).

б) Също се прави анализ, като се уточнява, че ястията може да са [супа и основно] **или** [супа и десерт], **или** [основно и десерт]. Учителят уточнява, че в задачата ще се използва както правилото за събиране, така и правилото за умножение на възможности. Възможностите за избор на две различни ястия са: супа и основно ястие ($3 \cdot 4$) или супа и десерт ($3 \cdot 2$) или основно ястие и десерт ($4 \cdot 2$). Така получаваме $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 12 + 6 + 8 = 26$ възможности за съставяне на обяд от две ястия.

Отговор: Могат да се изберат 26 различни обяда от две ястия.

Учителят напомня, че за решението или онагледяването на задачата може да се използва граф-дърво и поставя за домашна работа да го начертаят на хартиен или електронен носител.

2.3. Дейности за затвърдяване и разширяване на компетенциите по темата

Затвърдяването на новите знания се реализира чрез задачи, решавани от учениците, разпределени в екипи, и ръководени от учителя.

Задача 5. Колко четирицифрени числа с различни цифри може да се образуват от цифрите 6, 7, 8, 9 ?

Отговор: 24 четирицифрени числа с различни цифри.

Задача 6. Колко четирицифрени числа с различни цифри може да се образуват от цифрите 6, 7, 8, 0 ?

Отговор: 18 четирицифрени числа с различни цифри.

Задача 7. В групата на *Националния отбор по футбол* на България има 5 отбора, от които продължават да участват в следващи състезания само класираните се на първо и второ място. По колко начина могат да се заемат тези две места?

Отговор: 20 начина.

3. Рефлексия

3.1. Рефлексия над дейността на учениците

Рефлексията над дейността на учениците е процес, при който учениците се наблюдават и се анализира извършваната учебна дейност. Този похват е важен, тъй като изисква сложни умствени процеси и позволява на учениците да разглеждат проблема от различни гледни точки, да вземат независими решения и да поемат отговорност за своите действия.

Преподавателят наблюдава и управлява урока, чрез задачи и дискусии. Той оценява разбирането на учебното съдържание по отговорите и невербалните реакции на учениците.

Преди края на учебния час, учениците трябва самостоятелно да решат кратък тест, който може да е на хартиен или електронен носител. След приключването му, колективно се прави проверка и анализ на отговорите на теста. Дистаркторите са така подбрани, че да отразяват погрешни разсъждения.

1. От три танцови състава трябва да се избере по един солист. По колко начина може да стане това, ако в първия състав има 8 танцьори, във втория има 7 танцьори, а в третия 5 танцьори?
а) 3 начина;
б) 20 начина;
в) **280 начина.**

2. В един клас има 11 момчета и 13 момичета. По колко начина могат да се изберат двама отговорници (момче и момиче) на класа?
а) 24 начина;
б) **143** начина;
в) 132 начина.

3. На олимпиада по математика се явяват 10 финалисти. По колко различни начина могат да бъдат разпределени наградите за първо, второ и трето място?
а) 300 начина;
б) 27 начина;
в) **720** начина.

3.2. Личностна и интелектуална рефлексия над резултатите

Интелектуалната рефлексия, осъществявана от учителя, включва:

1. *Оценка на усвоеността на материала:* учителят анализира как учениците се справят с представената информация и дали са разбрали основните понятия и алгоритми. Той може да използва различни методи за оценка, като задава въпроси, ръководи дискусии или поставя учебни задачи. Добре е да зададе ключови въпроси от урока като например: „Какво е *съединение*?; Как определяме *класа на съединението*? По какво се различават *съединенията*? Кога се събират и кога се *умножават възможностите*? и др.“.

2. *Идентификация на трудности:* той търси признаци за затруднения на учениците. Това включва грешки в решенията или въпроси, които се появяват в хода на урока.

3. *Приспособяване на методите и подходите:* ако учителят забележи, че отделни ученици имат трудности с определени аспекти на знанията, той може да адаптира своя подход, за да им предостави допълнителна помощ и обяснения. Това може да включва повторение на определения, правила и свойства изразени чрез други думи, предоставяне на допълнителни примери или упражнения.

4. *Поощрение на въпроси и дискусии:* стимулира учениците да задават въпроси и да участват в дискусии, които водят до допълнителни обяснения и разяснения на учебното съдържание. Това създава възможност за по-задълбочено разбиране и усвояване на темата.

5. *Оценка на ефективността на урока:* оценява собствената си работа по време на урока и определя дали планираните цели са постигнати. Този процес на рефлексия му помага да идентифицира какво е постигнал и какво може да бъде подобро през следващите уроци.

Личностната рефлексия, осъществявана от учителя, включва следните аспекти:

1. *Самооценка*: учителят оценява собствената си професионална работа и взаимодействие с учениците. Това включва оценка на собствените си силни страни, но и възможните слаби моменти в процеса на обучение.

2. *Анализ на взаимодействието с учениците*: размишлява за начина, по който взаимодейства с учениците, какви отношения поддържа с тях и между тях и как стимулира мотивацията и интереса на обучаемите. Той преценява дали създава подходяща образователна среда и атмосфера за учене.

3. *Работа с индивидуални случаи*: разглежда как се справя с индивидуалните нужди и трудности на отделни ученици, и как може да ги подпомогне.

4. *Професионално развитие*: учителят оценява използваните от него учебни методи и стратегии, а също и собствените знания и умения. Той се запитва как може да се развие и подобри, за да бъде още по-ефективен.

5. *Работа с колеги*: Обмисля как може да подобри комуникацията и сътрудничеството с колегите, за да осъществи междупредметни връзки.

Учениците също могат да извършат рефлексия след урока, за да подобрят своето разбиране и извлекат поуки. Могат да се запитат:

1. Дали са наясно с основните понятия и правила, свързани с комбинаториката, и дали имат затруднения в някои области. Отбелязват въпроси, които имат или места, в които не са сигурни, като това може да бъде основа за бъдещи обсъждания и разяснения.

2. Обръщат внимание доколко са били мотивирани и заинтересовани по време на урока и как могат да поддържат интереса си и в бъдеще.

3. Преглеждат цялостното изпълнение на задачите в края на учебния час. Проверят дали успешно са приложили изучените концепции.

4. Обучаващите могат да споделят своето мнение относно начина, по който учителя представя знанията и да изкажат съвети за подобрене.

5. Споделят впечатления и интересни моменти от урока, за да се засили комуникацията и взаимодействието в класната стая.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Технологичната карта за описание на урок е мощен инструмент, който не само помага на учителите да планират и организират своите уроци по ефективен начин, но и стимулира учениците, като ги въвежда във вълнуващия свят на математиката. Подрастващите опознават и разбират света с помощта и подкрепата на обучаващите, които използват съвременни образователни похвати и методи. Учителите могат да изградят *технологични карти*, които да съчетават както традиционни методи, така и съвременни технологични средства. Картата не само подпомага учителите в тяхната работа, но и създава възможности за по-добро разбиране и обучение на учениците. Презентирането на материала чрез житейски примери и увлекателни задачи не само актуализира опорните знания на обучаваните, но и ги мотивира да учат и разбират комбинаториката. Главната цел е да се увеличи активността на учениците и да се насърчи колективната работа в екип.

Създаването на *технологична карта* изисква от учителите да бъдат добре подготвени и да следват определени стъпки, включващи определяне на целите на урока, избор на подходящи ресурси и материали, планиране на ядрата от урока, определяне на методите за оценяване. При избора на методи, обучаващият трябва да отчете следните фактори: учебното съдържание и характера на вътрешнопредметните и междупредметните връзки; целите и задачите на конкретния урок; способностите на учениците; учебните пособия, с които разполага; своите собствени умения.

Технологичната карта осигурява последователност и яснота в учебния процес. Тя може да бъде споделена и адаптирана според конкретните нужди на учителя и класа, като съдейства за бърз обмен на идеи и сътрудничество между образователните специалисти. Играе важна роля в процеса на постоянно усъвършенстване на образованието и учебния

процес, като предоставя структурираност и яснота в уроците и ги прави по-интерактивни и вълнуващи за учениците.

Рефлексията на обучаемите след урока е важен инструмент за тяхното лично развитие и усъвършенстване. Интелектуалната и личностната рефлексия на учителя е важен инструмент за подобрене на образователния процес и за съобразяване на методите, така че те да отговарят на нуждите на обучаваните. Той осъзнава дали учебните знания и умения ги предоставя по начин, който е разбираем и интересен за учениците, и че те ги усвояват успешно. Този процес му позволява да се адаптира към променящите се условия и да стане по-ефективен учител, който се грижи за цялостното развитие на своите обучаеми.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2023-ФПНО-03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

Искрено благодаря на проф. д-р Д. Гълъбова за споделения опит и знания.

REFERENCES

Bankov K., Stoeva, T., Tsvetkova, I., Petrova, D. (2017). Book for the mathematics teacher for the 8th grade, Sofia: Prosveta (**Оригинално заглавие:** Банков К., Стоева, Т., Цветкова, И., Петрова, Д., 2017. Книга за учителя по математика за 8-ми клас. София: „Просвета“).

Bankov, K. et al., (2022). Mathematics for 8th grade. Sofia: Prosveta - Sofia (**Оригинално заглавие:** Банков, К. и др., 2022. Математика за 8. Клас. София: „Просвета – София“).

Gleiman M., Varga T. (1983). The odds at school. Sofia: State Publishing House of National Education (**Оригинално заглавие:** Глейман М., Варга Т., 1983. Вероятностите в училище. София: „Държавно издателство народна просвета“).

Koleva, K. (2021). Logic tasks. V. Tarnovo: ITI (**Оригинално заглавие:** Колева, К., 2021. Логическите задачи. В. Търново: „ИТИ“).

Krasteva, Yu. (2013). An integration model for learning combinatorics in school. Abstract of a dissertation work. Plovdiv (**Оригинално заглавие:** Кръстева, Ю., 2013. Интеграционен модел за обучение по комбинаторика в училище. Автореферат на дисертационен труд. Пловдив) <https://procedures.uni-plovdiv.bg/docs/procedure/321/730186130345095809.pdf>.

Stoilkova, Ts. (2015). Compendium of Combinatorics and Probability. Sofia: Paradise (**Оригинално заглавие:** Стоилкова, Ц., 2015. Сборник по комбинаторика и вероятности. София: „Рая“).

Zapryanov Z., Marinkova M. (2008). Collection of problems and tests in combinatorics, probability and statistics. Sofia: Labor (**Оригинално заглавие:** Запрянов З., Маринкова М., 2008. Сборник от задачи и тестове по комбинаторика, вероятности и статистика. София: „Труд“).