

FRI-2G.307-1-ERI-10

BASIC PROBLEMS SOLVED WITH VIETA'S FORMULAS, NECESSARY TO TRAINING STUDENTS FOR STATE MATRICULATION EXAM AND NATIONAL EXTERNAL ASSESSMENT AFTER 10TH GRADE¹²

Teodora Markova, MSc Student

Department of Mathematics,
Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel: +359 898302173
E-mail: tina_90bg@abv.bg

Assoc. Prof. Antoaneta Mihova, PhD

Department of Mathematics,
Faculty of Natural Sciences and Education.
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 887812896
E-mail: amihova@uni-ruse.bg

Abstract: The paper presents the types of math problems studied in school and solved using Vieta's formulas. The types of problems that are found in the exam materials for State matriculation exams and National external assessment after 10th grade are examined.

Keywords: Vieta's formulas, National External Assessment after 10th grade, State matriculation exams.

ВЪВЕДЕНИЕ

Темата „Приложение на формулите на Виет“ се изучава в осми клас. (<https://web.mon.bg/bg/1>). Тя е продължение на темите свързани с намиране на корените на квадратно уравнение и предхожда темата за разлагане на квадратния тричлен на множители от първа степен.

Формулите на Виет изразяват зависимостите между коефициентите на даден многочлен и неговите корени. За полином от степен n е в сила следната теорема.

Теорема 1. (Белин,1971) Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, е полином от степен n и $x_1, x_2, \dots, x_n$ са неговите корени, тогава са в сила равенствата:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -\frac{a_1}{a_0}, \\x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_2}{a_0} \\x_1x_2 \dots x_n &= (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.\end{aligned}$$

В училище се разглежда частният случай на теоремата, когато полиномът е от втора степен.

Теорема 2. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

¹² Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 27 октомври 2023 г. в секция Образование – изследвания и иновации с оригинално заглавие на български език: ОСНОВНИ ВИДОВЕ ЗАДАЧИ, РЕШАВАНИ С ФОРМУЛИТЕ НА ВИЕТ, НЕОБХОДИМИ ЗА ПОДГОТОВКА НА УЧЕНИЦИТЕ ЗА ЗРЕЛОСТНИ ИЗПИТИ И ЗА НВО СЛЕД 10 КЛАС.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Основни видове задачи, решавани в училище с формулите на Виет (Паскалева, 2017; Лозанов, 1998)

1. Определяне сумата и произведението на корените на квадратно уравнение. Това са първите задачи, които се решават като се използват непосредствено равенствата от теоремата.

Задача 1. Да се намерят сумата и произведението от корените на уравнението $3x^2 + 5x + 1 = 0$.

Решение: Прилагайки непосредствено теоремата се намират сумата и произведението от корените: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{3}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$.

Задача 2. Да се намерят сумата и произведението от корените на уравнението $3x^2 + 12x + 3 = 7x - 3$.

Решение: Най-напред уравнението се преобразува, след което се прилагат формулите на Виет.

$$3x^2 + 12x + 3 = 7x - 3 \Rightarrow 3x^2 + 5x + 6 = 0 \\ \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{5}{3}; x_1 \cdot x_2 = 2.$$

2. Ако се знае единият корен на квадратно уравнение, то да се определи другият.

Задача 3. Числото 5 е корен на уравнението $x^2 - mx - 5 = 0$. Да се намерят другият корен и параметърът m .

Решение:

$$x^2 - mx - 5 = 0 \\ x_1 = 5, x_1 \cdot x_2 = -5 \Rightarrow 5 \cdot x_2 = -5 \Rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = m \Rightarrow m = 5 - 1 \Rightarrow m = 4.$$

Задача 4. Числото $2 - \sqrt{3}$ е корен на уравнението $x^2 - 4x + m = 0$. Да се намерят другият корен и параметърът m .

Решение:

$$x_1 = 2 - \sqrt{3}, x^2 - 4x + m = 0 \\ x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow 2 - \sqrt{3} + x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 4 - 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \\ x_2 = 2 + \sqrt{3} \\ x_1 \cdot x_2 = m \Rightarrow m = (2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) \Rightarrow m = 1.$$

3. Пресмятане стойност на израз, в който участват корените на дадено квадратно уравнение.

Задача 5. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $7x^2 - 21x - 2 = 0$, то да се намери стойността на израза $x_1 x_2 (x_1 + x_2)$.

Решение: $x_1 x_2 = -\frac{2}{7}$, $x_1 + x_2 = \frac{21}{7} = 3 \Rightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -\frac{2}{7} \cdot 3 = -\frac{6}{7}$.

Задача 6. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + 5x - 2 = 0$, да се намери стойността на израза $3x_1 + 3x_2 + 2x_1 x_2$.

Решение: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{1} = -5$, $x_1 x_2 = -\frac{2}{1} = -2$

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_1 x_2 = 3(x_1 + x_2) + 2x_1 x_2 = 3 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) = -15 - 4 = -19.$$

Задача 7. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 2x - 7 = 0$, да се намери стойността на израза $x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2$.

Решение: $x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2$, $x_1 x_2 = \frac{-7}{1} = -7$

$$x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = 4 + 7 = 11.$$

Задача 8. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $3x^2 - x - 6 = 0$, то да се намери стойността на израза $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$.

Решение: $x_1 + x_2 = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$, $x_1 x_2 = \frac{-6}{3} = -2 \Rightarrow$

$$\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = \frac{2x_2 + 2x_1}{x_1 x_2} = \frac{2(x_2 + x_1)}{x_1 x_2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{-2} = -\frac{1}{3}.$$

Задача 9. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 - 3x + 5 = 0$, да се намери стойността на израза $\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} &= \frac{x_2^3 + x_1^3}{x_1 x_2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \\ &= \frac{\frac{27}{8} - 3 \cdot \frac{15}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{-\frac{63}{8}}{\frac{5}{2}} = -\frac{63}{20}. \end{aligned}$$

4. Определяне дали корените на квадратно уравнение са положителни, отрицателни или с различни знаци

Задача 10. Да се определи дали корените на квадратно уравнение $3x^2 + 7x + 3 = 0$ са положителни, отрицателни или са с различни знаци.

Решение: $a = 3, b = 7, c = 3, D = 13$, следователно уравнението има реални корени. С теоремата на Виет намираме произведението и сбора на корените.

От $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{3} = 1 > 0$ следва, че корените са с еднакви знаци, а от $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{3}$ следва, че те са отрицателни.

5. Задачи за съставяне на квадратно уравнение.

Задача 11. Да се състави квадратно уравнение с корени $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$.

Решение: Търсим квадратно уравнение от вида $x^2 + px + q = 0$, където

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \text{ и } x_1 x_2 = q. \\ x_1 + x_2 &= 2 + 1 = 3 \Rightarrow -p = 3 \Rightarrow p = -3 \\ x_1 x_2 &= 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow q = 2 \\ \text{Търсеното уравнение е } &x^2 - 3x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Задача 12. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 - 3x - 1 = 0$, съставете квадратното уравнение с цели коефициенти и с корени $y_1 = x_1 + x_2$ и $y_2 = x_1 x_2$.

Решение: Нека търсеното квадратно уравнение е $y^2 + py + q = 0$, където

$$y_1 + y_2 = -p \text{ и } y_1 y_2 = q.$$

От $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$ и $y_2 = x_1 x_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 = -p \Rightarrow p = -1 \\ y_1 y_2 &= \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} \Rightarrow q = -\frac{3}{4} \\ y^2 - y - \frac{3}{4} &= 0 \Rightarrow 4y^2 - 4y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Задача 13. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 - 3x - 1 = 0$, съставете квадратното уравнение с корени $y_1 = x_1 + 2$ и $y_2 = x_2 + 2$.

Решение: Нека търсеното квадратно уравнение е $y^2 + py + q = 0$, където

$$y_1 + y_2 = -p \text{ и } y_1 y_2 = q.$$

От даденото уравнение определяме $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$.

$$y_1 = x_1 + 2$$

$$y_2 = x_2 + 2$$

$$y_1 + y_2 = x_1 + 2 + x_2 + 2 = x_1 + x_2 + 4 = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2} \Rightarrow p = -\frac{11}{2}$$

$$y_1 y_2 = (x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 =$$

$$= -\frac{1}{2} + 2(x_1 + x_2) + 4 = -\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 4 = \frac{13}{2} \Rightarrow q = \frac{13}{2}$$

$$y^2 - \frac{11}{2}y + \frac{13}{2} = 0 \Rightarrow 2y^2 - 11y + 13 = 0.$$

Задача 14. Дадено е квадратното уравнение $2x^2 + x - 16 = 0$. Съставете квадратно уравнение, корените на което са реципрочни на корените на даденото уравнение.

Решение: Нека търсеното уравнение е $y^2 + py + q = 0$, където $y_1 = \frac{1}{x_1}$ и $y_2 = \frac{1}{x_2}$.

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{1}{2}}{-8} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{16}$$

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow q = -\frac{1}{8}$$

$$y^2 - \frac{1}{16}y - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow 16y^2 - y - 2 = 0.$$

6. Задачи за определяне стойността на параметър, ако корените на квадратното уравнение удовлетворяват дадено условие

Задача 15. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които корените на уравнението $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ удовлетворяват зависимостта $x_1^2 + x_2^2 = 1,75$.

Решение: $x_1 + x_2 = 3a$ и $x_1 x_2 = a^2 \Rightarrow$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,75 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1,75$$

$$(3a)^2 - 2a^2 = 1,75$$

$$9a^2 - 2a^2 = 1,75$$

$$7a^2 = 1,75 \Rightarrow a^2 = 0,25 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}.$$

Основни видове задачи, включени в изпитните теми за Държавен зрелостен изпит по математика и за Национално външно оценяване по математика след 10 клас

Задачите, свързани с формулите на Виет, които са включени в изпитните теми за Държавен зрелостен изпит по математика и за Национално външно оценяване по математика след 10 клас предимно са задачи с избираем отговор, с четири възможни отговора, от които точно един е правилният.

След направен преглед на изпитните теми за последните 10 години, може да се направи изводът, че два са видовете задачи, свързани с формулите на Виет, които най-често се срещат.

► Първият вид задачи са за пресмятане стойност на израз, в който участват корените на дадено квадратно уравнение. Например:

• НВО по Математика – 10 клас, 16.06.2023 г. (<https://web.mon.bg/bg/1>)

Задача: Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $2x^2 - 3x - 4 = 0$, то стойността на израза $(x_1 x_2)^2 - (x_1 + x_2)$ е:

А) $-\frac{11}{2}$ Б) $\frac{3}{2}$ В) $\frac{5}{2}$ Г) $\frac{11}{2}$

• НВО по Математика – 10 клас, 18.06.2021 г. (<https://web.mon.bg/bg/1>)

Задача: Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + 5x - 2 = 0$, то стойността на израза $3x_1 + 3x_2 + 2x_1 x_2$ е:

А) -19 Б) -11 В) 11 Г) 19

• ДЗИ по Математика, 27.08.2021 г. (<https://web.mon.bg/bg/1>)

Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $6x - \frac{1}{x} = 1$, то $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ е равно на:

е равно на:

А) -6 Б) -1 В) 1 Г) 6

• ДЗИ по Математика, 29.05.2018 г. (<https://web.mon.bg/bg/1>)

Задача: Ако x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението $2x^2 - x - 6 = 0$, намерете стойността на израза $B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

А) $-2\frac{1}{12}$ Б) $-\frac{7}{12}$ В) $\frac{23}{12}$ Г) $2\frac{1}{12}$

► Вторият вид задачи са задачите за определяне дали корените на квадратно уравнение са положителни, отрицателни или с различни знаци. Например:

• ДЗИ по Математика, 29.05.2017 г. (<https://web.mon.bg/bg/1>)

Задача: Кое от квадратните уравнения има два реални положителни корена?

А) $-3x^2 + 5x - 1 = 0$ Б) $-3x^2 + 5x + 1 = 0$

В) $3x^2 + 5x - 1 = 0$ Г) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

• ДЗИ по Математика, 22.05.2015 г. (<https://web.mon.bg/bg/1>)

Задача: Кое от уравненията има два отрицателни реални корена?

А) $-3x^2 + 7x + 2 = 0$ Б) $3x^2 + 7x + 2 = 0$

В) $-3x^2 + 7x - 2 = 0$ Г) $3x^2 + 7x - 2 = 0$

• ДЗИ по Математика, 28.08.2015 г. (<https://web.mon.bg/bg/1>)

Задача: Кое от квадратните уравнения има реални корени с различни знаци?

А) $-3x^2 - 4x + 1 = 0$ Б) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

В) $3x^2 + 4x + 1 = 0$ Г) $4x^2 + 3x + 1 = 0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изводът, който може да се направи след разглеждане на изпитните теми за Държавен зрелостен изпит по математика и за Национално външно оценяване по математика след 10 клас е: Задачите, в които се използват знанията на учениците за формулите на Виет са основно от двата, посочени по-горе вида. Това би могло силно да ограничи подготовката на учениците за тези изпити. Но ако се погледнат и теми от кандидатстудентски изпити по математика в различни университети, то може да се забележи същата тенденция.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2023-ФПНО-03, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Belin B., K. Chimev (1971). Applications of the Vieta's formulas, Prosveta press, Sofia (**Оригинално заглавие:** Белин В., К. Чимев, (1971). „Приложение на формулите на Виет“, Народна просвета, София).

Gavrilov, M., I. Dimovski (1982). Modern algebra for teachers, Prosveta press, Sofia (**Оригинално заглавие:** Гаврилов М., Ив. Димовски, (1982). Съвременна алгебра за учители, Народна просвета, София).

Galabova D., P. Dineva (2019). Compendium of Mathematics for grades 8, 9 and 10, Vedi press (**Оригинално заглавие:** Гълъбова Д., П. Динева, (2019). Сборник по Математика за 8., 9. и 10 клас, Веди).

Zapryanov Z., etc. (1998). Textbook for 9th grade, Prosveta press, Sofia (**Оригинално заглавие:** Запрянов З. и др., (1998). Учебно помагало за 9 клас, Просвета, София).

Kolarov K., etc. (1997). Collection of algebra problems 7 - 10 class, Prosveta press, Sofia (**Оригинално заглавие:** Коларов К. и др., (1997). Сборник задачи по алгебра 7 – 10 клас, Народна просвета, София).

Kolev, E., I. Georgiev, S. Kokinova (2000). Колев Е., И. Георгиев, С. Кокинова, (2000). Mathematics for 8th grade, Bulvest 2000 press (**Оригинално заглавие:** Математика за 8 клас, Булвест 2000).

Lozanov Ch., M. Gavrilo (1998). Mathematics for 9th grade, Anubis press, Sofia (**Оригинално заглавие:** Лозанов Ч., М. Гаврилов и др., (1998). Учебник по математика за 9 клас, Анубис, София).

Paskaleva Z., P. Paskalev (2017). Mathematics for 8th grade, Arhimed press, Sofia (**Оригинално заглавие:** Паскалева З., П. Паскалев и др., (2017). Учебник по математика за 8 клас, Архимед, София).

<https://web.mon.bg/bg/1999> (юни, 2023).