

SAT-2G.307-2-ERI-11

APPLICATION OF THE FIVE-LEVEL MODEL OF TEACHING MATHEMATICS ON THE TOPIC OF BIQUADRATIC EQUATIONS¹³

Sedat Mahmud – MSc Student

Department of Mathematics,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Tel.: +359899677369
E-mail: setco_ss@abv.bg

Chief assist. Prof. Anna Lecheva, PhD

Department of Mathematics,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Tel.: +359878165411
E-mail: alecheva@uni-ruse.bg

Abstract: *This paper presents Biquadratic equations. This topic is a part of the Quadratic equation's module, which is included in the compulsory Mathematics curriculum in the 8th grade. The Five-level Mathematics teaching model suggested by A. Lecheva has been applied. The model's stages are described, and relevant examples and math problems have been selected. The developed methodology is applicable for both - traditional and distance education.*

Keywords: *Biquadratic equations, Quadratic equations, Five-level teaching model.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Интерактивно базираното обучение е преди всичко диалогово обучение, в процеса на което се осъществява връзка между обучаващия и обучавания, и предполага взаимно разбиране, съвместно решаване на общи, но значими за всеки участник казуси (Lecheva, A., 2021).

Петстепенният модел за обучение по Математика е основан на базисните нива в Пирамидата на ученето (Learning pyramid, October, 2021) и включва следните степени:

1. Основни понятия по темата - определения и теореми;
2. Връзки с изучени теми и / или междупредметни връзки;
3. Технология за решаване на задачи по темата;
4. Придобиване на умения - приложение на теорията;
5. Разширяване на уменията - самостоятелна работа / работа в екип.

В **първото ниво** преподавателят дава определения на основните понятия по темата, формулира теореми, твърдения и следствия. Това е пасивно ниво, на което обучаваните навлизат в тематиката.

Във **второто ниво** обучаващият свързва новата тема с познати и изучени теми и задава междупредметни връзки, ако има такива. Целта е учащите да осмислят по-лесно нововъведените понятия, като ги свързват с нещо вече изучено. Това отново е пасивно ниво.

В **третото ниво** преподавателят онагледява методи и демонстрира технологията за решаване на конкретни задачи по темата, използва формули и таблици. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето.

В **четвърто ниво** обучаваните дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от учителя, предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това също е активно ниво.

¹³ Докладът е представен на научната сесия на 28 октомври 2023 в секция Образование – изследвания и иновации с оригинално заглавие на български език: ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПЕТСТЕПЕННИЯ МОДЕЛ НА ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ПО ТЕМАТА БИКВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ.

В **петото ниво** се решават задачи по темата от обучаваните самостоятелно или разделени на екипи. В този етап на метода преподавателят става неактивен участник в процеса на обучение, т.е. отговаря само на възникнали въпроси, дава насоки и предложения, получава обратна връзка (рефлексия) чрез анализиране и дискутиране на получените резултати. Това ниво е най-ефективното за учениците според Пирамидата на учене. На този етап те прилагат на практика усвоения учебен материал (Lecheva, A., 2021).

Темата **Биквадратни уравнения** е развита в настоящата публикация съобразно етапите на Петстепенния модел (Mahmud S., scientific advisor Anna Lecheva, 2023). Тя е включена в задължителната общообразователна подготовка по Математика в 8.клас, одобрена от МОН (<https://www.mon.bg/>).

ИЗЛОЖЕНИЕ

I. В първото ниво на модела е необходимо преподавателят да въведе обучаваните в темата, като даде определения на основните понятия, формулира нужните теореми, твърдения и следствия. Тъй като това е пасивно ниво, на което обучаваните навлизат в тематиката, преподавателят има възможност да използва разнообразни иновативни техники и технологии.

Въз основа на един от основните принципи на конструктивизма, който гласи, че учебникът не е основен източник на информация, преподаващият би могъл да поднесе теоретичния материал под формата на презентация, документ в електронен формат или аудио-видео материал. За целта би могъл да използва иновативни компютърни технологии като мултимедияен проектор, интерактивна дъска, индивидуални работни станции или таблети, ако обучението се провежда в оборудвана компютърна зала или да споделя текстови и / или видео файлове при електронно обучение (Lecheva, A., 2021).

Без значение от техниката на преподаване и използваните технологии, задължително е обучаваните да получат следните основни теоретични познания по темата:

1. Биквадратни уравнения.

Определение: Уравнения от вида $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$, където x е неизвестно число и a, b и c са дадени числа, се нарича **биквадратно уравнение**.

Уравнения, които след тъждествени преобразувания приемат вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0, \text{ също се наричат биквадратни.}$$

Уравнение, в което поне един от коефициентите b или c е равен на нула, се наричат непълни биквадратни уравнения.

II. Във второто ниво на модела новата тема се обвързва с познати и изучени теми и се задават междупредметни връзки, ако има такива. Целта е обучаваните да осмислят по-лесно новите понятия, като ги свързват с нещо познато. Тъй като това е пасивно ниво, удачно е преподавателят да продължи да използва техниките и технологиите, които е прилагал в първото ниво на модела.

- Квадратно уравнение
- Непълно квадратно уравнение;
- Формули за съкратено умножение;
- Реални числа.

III. В трето ниво на модела преподаващият излага методи и технологии за решаване на конкретни задачи по темата **Биквадратни уравнения**. Прилага формули и показва примери на хартиен или електронен носител, с които обучаващите разполагат предварително. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето.

Необходимо е демонстрацията да започне с лесни примери, които имат пряка връзка с вече изучени теми.

Пример 1: Да се решат биквадратните уравнения (Paskaleva Z. etc., 2017):

а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

б) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

$$в) x^4 - 8x^2 + 15 = 0$$

$$г) x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Решение:

$$а) x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Полага се $x^2 = y > 0 \Rightarrow$ получава се квадратното уравнение

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 169 - 144 = 25$$

$$y_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$y_1 = \frac{13 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$y_2 = \frac{13 - 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Връща се в полагането:

$$- x^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 0, x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$- x^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 9 = 0, x_3 = 3, x_4 = -3$$

Даденото уравнение има четири корена $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -3$

$$б) x^4 - 26x^2 + 25 = 0$$

Полага се $x^2 = y > 0 \Rightarrow$ получава се квадратното уравнение

$$y^2 - 26y + 25 = 0$$

$$D = (-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 676 - 100 = 576$$

$$y_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2}$$

$$y_1 = \frac{26 + 24}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$y_2 = \frac{26 - 24}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Връща се в полагането:

$$- x^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 25 = 0, x_1 = 5, x_2 = -5$$

$$- x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$$

Уравнението има корени:

$$x_1 = 5, x_2 = -5 \text{ и } x_3 = 1, x_4 = -1$$

$$в) x^4 - 8x^2 + 15 = 0$$

Полага се $x^2 = y \Rightarrow$ получава се квадратното уравнение

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

$$y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$y_1 = \frac{8 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$y_2 = \frac{8 - 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Връща се в полагането:

$$- x^2 = 5 \Rightarrow x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$$

$$- x^2 = 3 \Rightarrow x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}$$

Уравнението има корени:

$$x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5} \text{ и } x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}$$

$$г) x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Полага се $x^2 = y > 0 \Rightarrow$ получава се квадратното уравнение

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$y_1 = 4, y_2 = -1$$

Връща се в полагането:

- $x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$
- $x^2 = -1 \Rightarrow$ няма реални корени.

IV. В четвърто ниво на модела се дава възможност на учащите да дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от обучаващия. Те предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това също е активно ниво от Пирамидата на ученето.

Задачи, които съответстват на изучавания в час материал (Paskaleva Z. etc., 2017):

Задача 1: Решете непълните биквадратни уравнения

а) $9x^4 - 4x^2 = 0$

б) $x^4 - 16 = 0$

Решение:

а) $9x^4 - 4x^2 = 0$

Полага се $x^2 = y \Rightarrow$ получава се непълното квадратно уравнение

$$9y^2 - 4y = 0$$

$$y(9y - 4) = 0$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{4}{9}$$

Връща се в полагането:

$$x^2 = 0 \quad x^2 = \frac{4}{9}$$

$$x_{1,2} = 0 \quad x_{3,4} = \pm \frac{2}{3}$$

Уравнението има корени:

$$x_{1,2} = 0, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = -\frac{2}{3}$$

б) $x^4 - 16 = 0$

Полага се $x^2 = y > 0 \Rightarrow$ получава се непълното квадратно уравнение

$$y^2 - 16 = 0$$

$$(y - 4)(y + 4) = 0$$

$$y_1 = 4 \quad y_2 = -4$$

Връща се в полагането:

При $x^2 = 4$ се получават корени $x_{1,2} = \pm 2$.

При $x^2 = -4$ уравнението няма корени.

Задача 2: Да се реши уравнението $(x^2 - 3)^2 - (x + 2)(x - 2) = 1$

Решение:

Разкриват се скобите и се привежда към биквадратно уравнение

$$x^4 - 6x^2 + 9 - x^2 + 4 = 1$$

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

Полага се $x^2 = y > 0 \Rightarrow$ получава се квадратното уравнение

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$y_1 = 3 \quad y_2 = 4$$

$$x^2 = 3 \quad x^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \quad x_{3,4} = \pm 2$$

Уравнението има корени:

$$x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = 2 \text{ и } x_4 = -2$$

V. В пето ниво на модела обучаваните решават задачи по темата самостоятелно. Преподавателят заема пасивна роля - отговаря на възникнали въпроси и дава насоки при решаването на задачите. В този етап е важно преподаващият да получи обратна връзка за степента на усвояване на новия материал чрез дискусия и анализ на получените отговори на

задачите от обучаващите се. Избраните от обучаващия задачи са подходящи за самостоятелна домашна работа или за работа в екипи. Това ниво е най-ефективното според Пирамидата на ученето. Учащите прилагат на практика наученото и задълбочават нивото на разбиране по съответната тема (Lecheva, A., 2021).

Подходящи задачи за самостоятелна и / или екипна работа (Paskaleva Z. etc., 2017):

Задача 1. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

Задача 2. $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Задача 3. $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

Задача 4. $4x^4 - 9 = 0$

Задача 5. $(x^2 - 4)^2 = 7 - (x + 3)(x - 3)$

ИЗВОДИ

Настоящата публикация представя урок, в който е приложен Петстепенният модел за обучение по математика, предложен от А. Лечева (Lecheva, A., 2021).

Урокът е подходящ за въвеждане, задълбочаване и разширяване на знанията и уменията на учениците по темата *Биквадратни уравнения*. Разработената тема може да се използва за традиционно и дистанционно обучение.

Използваният модел допринася за развиване на конструктивно мислене, способност за изказване на твърдения, способност за придобиване на ясно и точно структурирано знание, за контакт с останалите и за себеизразяване.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2023-ФПНО-03, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Lecheva, A., *A five-level model of teaching mathematics based on constructivism and interactivity*, PROCEEDINGS OF UNIVERSITY OF RUSE - 2021, volume 60, book 6.4, pp. 59-64 (**Оригинално заглавие:** *Петстепенен модел на обучение по математика, базиран на конструктивизма и интерактивността*), Научна конференция на Русенски университет (2021), том 60, книга 6.4, стр. 59-64, ISBN: 2603-4123 <https://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp21/6.4/6.4-9.pdf>.

Mahmud S., scientific supervisor Anna Lecheva, *Quadratic equations in the school course in Mathematics* (2023), Master degree project, University of Ruse, (**Оригинално заглавие:** *Квадратни уравнения в училищния курс по Математика*, Дипломен проект, Русенски университет (2023)).

Ministry of Education and Science – *Министерство на образованието и науката*, <https://www.mon.bg/>.

Paskaleva Z. etc., (2017). “Mathematics 8-th grade – general education”, Arhimed (**Оригинално заглавие:** Паскалева З. и др. „Математика 8 клас – общообразователна подготовка“, Архимед, 2017, ISBN: 978-954-779-213-5).

Learning pyramid (October, 2021) <https://www.educationcorner.com/the-learning-pyramid.html>.