

FRI-2G.307-1-ERI-02

TECHNOLOGICAL MODEL FOR TEACHING ON THE SUBJECT "SETS AND OPERATIONS WITH THEM"²

Pr. Assist. Prof. Desislava Georgieva, PhD

Department of Algebra and Geometry

Faculty of Mathematics and Informatics

St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Bulgaria

Tel.: +359 887 244 498

E-mail: d.georgieva@ts.uni-vt.bg

Abstract: *In mathematics education „The theory of sets“ contributes to using a unified approach to describe and systematize different scientific knowledge. This unitary approach saves time and mental effort on the part of students to develop their mathematical competencies. Therefore, it is appropriate to study this topic explicitly (in a separate lesson) in an enthralling and accessible way for children. This article presents a technology model that includes a Technology Map and a Lesson Plan for an introduction to set theory. The development can be directly used in school practice or it serves as an exemplary model for advance planning of learning activities in a modern and effective method.*

Keywords: *Education, Application of set theory, Technology map, Lesson plan, Personal and intellectual reflection.*

ВЪВЕДЕНИЕ

В обучението по математика, *Теорията на множествата* представлява важна и основна част от учебния процес, защото предоставя единен подход за описване и систематизиране на широк кръг от знания, от различни научни области. Интегрирането на тази тема в учебния процес се явява от съществено значение, защото тя може да улесни обучението и да направи математиката по-достъпна и интересна за учениците.

Представен е *Технологичен модел* за обучение по темата „*Множества и операции с тях. Графично представяне на множества*“, който може да бъде директно приложен в учебния процес и да допринесе за по-голямата успеваемост на учениците в изучаването на теорията. Той включва два основни инструмента: *Технологична карта* и *План-схема на урока*, в които концепциите са представени чрез визуални средства и интерактивни методи, които помагат на учениците да останат ангажирани през цялото време и да съзират връзката между абстрактните понятия и реалния свят.

ИЗЛОЖЕНИЕ

В основното образование, не може да се залага изучаване в дълбочина на *Теорията на вероятностите*, поради два фактора, които ограничават процеса – краткотрайното внимание на детето и липсата на напълно усвоени математически понятия. За да се справим с първия фактор, можем да изберем интересни и лесни за разбиране теми. Що се отнася до втория фактор, той зависи от учебните програми и средства (Gleiman, Varga 1983).

В учебната програма за 6. клас (MON) е предвидено явното изучаване на понятия от *Теория на множествата*, които са необходими за изучаване на *Теория на вероятностите* и *Комбинаториката*, защото с елементарните събития могат да се извършват обичайните за множествата действия, които имат други названия (Obretenov 1974).

В наличните образователни средства се предоставят задачи, от национални или международни математически олимпиади (Zapryanov, Marinkova 2008), които са достъпни

² Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 27 октомври 2023 г. в секция Образование – изследвания и иновации с оригинално заглавие на български език: ТЕХНОЛОГИЧЕН МОДЕЛ ЗА ОБУЧЕНИЕ ПО ТЕМАТА „МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ С ТЯХ“.

единствено за деца с разширена математическа подготовка, без да се предоставят дидактически коментари. Липсват средства с изчерпателно описание на методическия аспект.

В следващите раздели ще разгледаме детайлно конкретна *Технологична карта* и *План-схемата на урока*, предоставяйки конкретни насоки за тяхното използване и възможните ползи, които могат да се постигнат чрез този модел.

1. Технологична карта на урок

Идеята за разработване на технологичната карта на конкретен урок по математика се среща отдавна, още в учебниците на Ив. Ганчев. По-късно е доразвита, конкретизирана и обогатена от Д. Гълъбова (Galabova, 2008). Технологичната карта на урока (Табл. 1) има множество предимства. Тя помага на учителите да планират и организират своите уроци по ефективен начин. Предоставя ясна и последователна структура на урока. В нея се идентифицират необходимите ресурси и материали, които да бъдат предварително подготвени. Тя служи като инструмент за рефлексия и самоусъвършенстване, като позволява на учителите да прегледат и оценят своите уроци след тяхното провеждане. И не на последно място, тя може да бъде лесно споделена с други учители, което позволява обмен на идеи и сътрудничество.

2. Организационни компоненти на урока

2.1. Събуждане на интереса на учениците

Учителят показва няколко различни реални топки или предварително подготвени изображения на мултимедия (Фиг. 1). Посредством беседа с учениците те изясняват, че топките са за различни спортове, но имат **общо свойство**, спрямо което могат да бъдат обединени. Те принадлежат на едно и също *множество*, а именно *множеството на топките*. Съществуват много и различни множества. Заедно извеждат извода, че за да могат да се обединят в множество, обектите трябва да имат някакви общи свойства. Учителят съобщава заглавието на раздела и уроците които предстои да изучат. Събужда любопитството като казва, че темата е съвсем нова и няма нищо общо с това, което са учили по математика до момента, а знанията който ще усвоят са интересни и приложими в ежедневието.

2.2. Запознаване с нови знания и умения

Учителят съобщава заглавието на урока и го записва на дъската „*Множества и операции с тях. Графично представяне на множества*“.

С цел да пести време, той диктува определенията като точки от плана на урока:

1. *Множество* – съвкупност от обекти, обединени по някакъв общ признак.

Съобщава, че множествата се означават с големи латински букви. Привлича вниманието на учениците с мултимедията на която са изобразени предшествениците на любимите на децата смартфони (Фиг. 2.). Обяснява, че това е множеството на телефоните. Те са различни по размер, марка, година на производство, функционалности и т.н., но на всички основното им предназначение е за комуникация. Всеки един телефон представлява отделен *елемент* на това множество.



Фиг. 1. Множество на топките



Фиг. 2. Множество на телефоните

Обучаващият напомня, че съществуват много и различни множества и посочва примери от математиката: естествените числа (N) и множеството на четните едноцифрени числа – $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Таблица 1. Технологична карта

1. ОБРАЗОВАТЕЛНИ ПАРАМЕТРИ: <i>Учебна програма за 6. клас</i>	2. ОБЛАСТ НА КОМПЕТЕНТНОСТ: <i>Елементи от вероятности и статистика</i>	3. РАЗДЕЛ: <i>Елементи от вероятности и статистика</i>
ТЕМА на урока	Множества и операции с тях. Графично представяне на множества	
ВИД на урока	Урок за нови знания	
ЦЕЛИ на урока	Формиране на компетентности като очаквани резултати от обучението по темата	Нови понятия в урока
Развиване на компетентности на ученика	Ученикът знае: - какво е множество; - какво е сечение на множества; - какво е обединение на множества. Умее да: - намира сечение на множества; - намира обединение на множества; Осъзнава важността и приложимостта на изучените нови понятия.	множество, подмножество, елемент на множество, крайно множество, безкрайно множество, обединение, сечение.
Учебни методи	Методи в традиционното обучение	Методи за активно и интерактивно обучение с ИКТ
	наблюдение, сравнение, абстрахиране, обобщение дискусия, групово работа, индивидуална работа, контрол, преценка, упражнение	- компютърна урочна презентация; - софтуер за бяла дъска – OpenBoard (при онлайн обучение).
Учебни ресурси	учебник, тетрадка, химикал, маркер	- проектор/ интерактивна бяла дъска; - работа с електронно четим/ електронен учебник.
Интегративни връзки	Вътрешнопредметни връзки	Междупредметни връзки
	вероятности, статистика	музика, география, информационни технологии, биология.
2. Организационни компоненти	Дейности на учителя	Дейности на учениците
2.1. Събуждане на интереса (актуализация на опорни за новото знание и мотивация)	Показва различни предмети от едно множество. Ръководи беседа, насочва, сравнява. Въвежда новата тема.	наблюдават; разсъждават; отговарят.
2.2. Запознаване с нови знания и умения	Запознава с: - видове множества; - операции с множества. След опитите на учениците диктува определения за: - множество;	Назовават различни множества. Опитват се сами да формулират определения. Записват определенията. Подпомогнато решават

	- елемент на множество; - подмножество. Задава задачи с нарастваща трудност, подпомага решаването.	задачи.
2.3. Дейности за затвърдяване и разширяване на компетентностите по темата	Поставя за решаване по-сложни задачи за множества от сборник по математика.	Предлагат свои варианти за множества и подмножества. Решават задачи и тестове с множества в различни условия.
3. РЕФЛЕКСИЯ	Дейност на учителя	Дейности на учениците
3.1. Рефлексия над дейността на учениците	- наблюдава и контролира дейността на учениците; - подбира и предлага подходяща система от задачи; - определя нивото на новите знания и неусвоените нови понятия чрез кратък електронен тест по темата.	- преценяват верността на своите отговори в беседата; - самооценяват резултата от теста.
3.2. Личностна и интелектуална рефлексия над резултатите	- задава ключови въпроси от урока; - търси причини за пропуските в краткия тест; - набелязва дейности за преодоляване на пропуските.	- преценяват дали проявяват интерес към темата; - преценяват могат ли да възпроизведат определенията от урока; - съпоставят с резултатите на съучениците си.

Учителят диктува следващата точка-определение, а учениците записват:

2. *Елемент на множество* – всеки обект, който принадлежи на даденото множество.

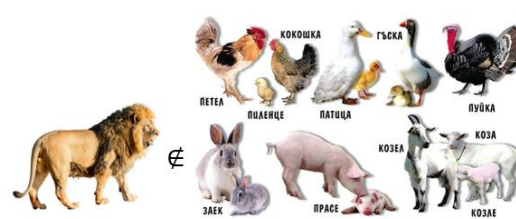
Обяснява как се означават елементите, записва математическата символика и как точно се четат. Посочва пример: буквата *z* принадлежи на множеството от латински букви.

Учителят предоставя възможност на учениците да изкажат примери за различни множества и техните елементи, като обръща специално внимание на това, кое принадлежи (Фиг. 3.) и кое НЕ принадлежи (Фиг. 4.) към дадено множество. Посочва конкретен пример от математиката: „числото 3 е елемент само на множеството N и $3 \notin A$ (множеството на четните едноцифрени числа), но числото 4 принадлежи и на N и на A и може да се запише, че $4 \in A$, $4 \in N$ “. Учителят пита за броя на елементите на разглежданите множества.

Записват следваща точка „3. *Видове множества*“ и определенията за *крайно*, *безкрайно* и *празно множество*. Отбелязва, как по-лесно да запомнят знака. Класифицират предходните множества, установяват, че множеството на всички четни едноцифрени числа, кратни на 5 е *празно множество*, защото няма четно едноцифрено число кратно на 5.



Фиг. 3. Пример за принадлежност



Фиг. 4. Не принадлежи на множеството

За да не се използва ново понятие „равномощни множества“ се използва термина *равенство на множествата* – състоят се от едни и същи елементи.

Учителят диктува следващото определение и веднага изисква посочване на примери.

4. *Подмножество* – ако всички елементи на множеството A се съдържат в множеството B , то A е подмножество на B . Записваме $A \subset B$.

Разглеждат примера: множеството $A = \{2; 4; 6\}$ е подмножество на множеството $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16\}$, защото всички елементи на A се съдържат в множеството B , но те не са равни, тъй като има елементи от B , които не принадлежат на A . Изобразява с диаграма на Ойлер-Вен и подчертава, че с такива кръгове най-лесно се изобразяват графично релациите между множествата.

Учителят визуализира две множества, които имат общи елементи (Фиг. 5.) и активира наблюдателността на учениците: „Какво забелязвате? Какво свойство притежават числата от множеството A , а от множеството B ? Какво можем да кажем за всички числа от двете множества?“ – „Числата се делят на две **или** на три“. Чак тогава учителят диктува следващата точка и определенията.

5. *Операции с множества*:

а) *обединение* (логическо събиране) на множества. На фиг. 5. това са всички числа в двата кръга, т.е. $C = A \cup B$ – четем C е обединение на A и B .

Първо задава въпрос за свойствата на числата, които принадлежат едновременно и на двете множества – от зелената част (смесването на двата цвята жълто и синьо). Възможно е да получи отговор, че се делят на 6. Тогава припомня правилото, за числа кратни на 6 – те трябва едновременно да се делят на 2 **и** на 3, т.е. тези числа притежават свойствата и на двете множества. След това записват определенията:

б) *сечение* (логическо умножение) на множества. На същото изображение това са общите елементи за двата кръга (там където те се пресичат), т.е. $C = A \cap B$ – четем C е сечение на A и B .

Визуализира две множества, които нямат общи елементи и пита за сечението. Извеждат: Ако две множества нямат общи елементи, казваме, че сечението им е празното множество. Например, ако с A означим множеството на четните числа, а с B множеството на нечетните числа, то $A \cap B = \emptyset$.

Коментират се различните варианти на обединение и сечение на множества и тяхното представяне с кръговете на Ойлер – Вен (Paskaleva et al. 2017). Изисква учениците да изкажат примери за всеки от разгледаните случаи.

2.3. Дейности за затвърдяване и разширяване на компетентностите по темата

Затвърдяването на новите знания се реализира чрез задачи, подобни на следните, решавани от ученици и ръководени от учителя.

Задача 1. Вашият клас е от 26 ученици и всеки от вас има компютър или таблет. 20 от вас имат компютър, а 14 имат таблет. Определете колко от вас имат и двете устройства. Изобразете решението с кръговете на Ойлер – Вен. Какви са двете множества (пресичат ли се или не)? Какво търсим обединение или сечение? **Отг.:** 8 ученици.

Задача 2. Всички ученици от 6. А, Б и В клас участват в извънкласни занимания. 42 ходят на футбол, а 34 участват в клуба по шах. Колко общо са учениците, ако знаем, че 8 от тях ходят и на двете занимания? Изобразете с кръгове. Насочва с въпросите: „Като знаем, че няколко участват и в двете множества, как ще изобразим с диаграма. Как ще намерим колко ходят само на футбол и колко само на шах?“ **Отг.:** 68 ученици.

Обучаващият насочва как да типизират следващи задачи, с цел по-бързо ориентиране и откриване на решението: „Можем ли да кажем, че двете задачи са права и обратна? При първата какво се търси? А при втората дадено ли е сечението? Как най-лесно можем да решаваме такива задачи? Помагат ли ни изображенията чрез диаграмите на Ойлер – Вен?“

3. Рефлексия

3.1. Рефлексия над дейността на учениците

През целия учебен час обучаващият наблюдава и контролира дейността на учениците чрез поставените задачи и дидактическата беседа. Така той извършва моментална рефлексия

над дейността на обучаемите и съобразява следващите си действия в зависимост от особеностите на съответния клас. Предварително подбира и предлага подходяща система от задачи, с която да определи нивото на знанията и неусвоените нови понятия.

В края на учебния час учениците трябва самостоятелно да решат три задачи, за непосредствено приложение на изученото, дадени от учителя под формата на тест. Теста може да е на индивидуални листи или да се визуализира на проектора, тъй като е с малко текст. Ако учителят желае да предизвика допълнителни положителни емоции, теста може да е разработен в сайта Kahoot.com и учениците да се включат бързо от своите смартфони чрез сканиране на QR код на играта или да влязат в Kahoot.it и да въведат кода на теста. Веднага след приключване, колективно се прави проверка и анализ на отговорите на въпросите.

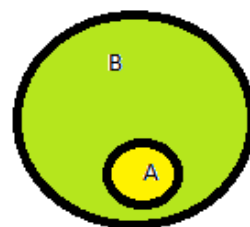
1. Със символа $\emptyset$ се означава:
а) обединение на множества;
б) крайно множество;
в) празно множество.

2. Дадено е множеството $P = \{3; 7; 9; 11; 15; 17; 19; 21\}$. Кое от множествата е подмножество на P .
а) $A = \{3; 7; 9; 16\}$
б) $B = \{7; 11; 17; 21\}$
в) $C = \{3; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 25\}$

3. На фигурата (Фиг. 6.) са дадени множествата A и B . Вярно е, че:
а) $A \cap B = A$
б) $A \cap B = B$
в) $A \cup B = A$



Фиг. 5. Сечение на четни числа с числа кратни на 3



Фиг. 6. Кръгове на Ойлер – Вен към задача №3 от теста

Обучаваните извършват рефлексия над дейността си като преценяват верността на своите отговори в беседата и самооценяват резултатите си от теста.

3.2. Личностна и интелектуална рефлексия над резултатите

Обучаващият извършва интелектуална рефлексия над резултатите, като в края на учебния час задава ключови въпроси от урока: „Какво е множество? Каква е разликата между множество и подмножество? Каква е разликата между крайно и безкрайно множество? Каква е разликата между обединение и сечение?“. От получените отговори той преценява дали учениците разбират основните математически концепции, които са били обсъдени, а от теста заключава могат ли да ги приложат в различен контекст. Преценява как учениците подхождат към решаването на математически проблеми, използват ли логично и критично мислене. Търси причини за грешните отговори на някои ученици; набелязва дейности за преодоляване на пропуските. Обръща внимание отново да бъдат разгледани задачите и схемите в урока. Задава подходяща самостоятелна домашна работа за допълнително упражняване по темата.

Учителят си задава и следните въпроси: „Как учениците работят заедно по време на груповите задачи и дискусии? Подкрепят ли идеите на другите и добавят ли към тях?; Какво е отношението им към изучената тема? Виждат ли я като полазена и интересна?“

Личностна и интелектуална рефлексия над резултатите обучаваните осъществяват, като преценяват дали проявяват интерес към темата; могат ли да възпроизвеждат определенията от урока. Те съпоставят своите резултати с резултатите на съучениците си.

Обучаващият също е добре да си постави следните въпроси: „Учениците могат ли да оценят своите собствени умения и разбиране? Разбират ли къде имат нужда от подкрепа?“.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Технологичният модел може да се прилага, както в дадения пример, така и при други теми от *Комбинаторика* и *Теория на вероятностите*. Изискуемата минимална подготовка от страна на учителя, не отнема много време, а се предполага, че резултатите ще са положителни, тъй като обучаемите са активно включени, подпомогнато достигат до новите понятия и изводи, насърчавани са да извършват рефлексия над дейността и резултатите си.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2023-ФПНО-03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

- Argirova T., Kocheva V., Marcheva K., Dimitrova S. (2017). Mathematics 6. Class. Sofia: Prosveta Alphabets (**Оригинално заглавие:** *Аргирова Т., Кочева В., Марчева К., Димитрова С. (2017). Математика 6. Клас. София: „Просвета Азбуки“*).
- Gleiman M., Varga T. (1983). The odds at school. Sofia: State Publishing House of National Education (**Оригинално заглавие:** *Глейман М., Варга Т., 1983. Вероятностите в училище. София: „Държавно издателство народна просвета“*).
- Mathematics curriculum for 8th grade, Ministry of Education (**Оригинално заглавие:** *Учебна програма по математика за 8. клас, Министерство на образованието*).
- Ninkova P., Lilkova M., Stoeva T. (2017). Mathematics 6. Class. Sofia: Prosveta – Sofia (**Оригинално заглавие:** *Нинкова П., Лилкова М., Стоева Т., 2017. Математика 6. клас. София: „Просвета – София“*).
- Obretenov A. (1974). Probability theory. Sofia: Science and Art (**Оригинално заглавие:** *Обретенков А., 1974. Теория на вероятностите. София: „Наука и изкуство“*).
- Paskaleva Z., Alashka M., Alashka R. (2017). Mathematics 6th grade. Sofia: Archimedes (**Оригинално заглавие:** *Паскалева З., Алашка М., Алашка Р., 2017. Математика 6. клас. София: „Архимед“*).
- Zapryanov Z., Marinkova M. (2008). Collection of problems and tests in combinatorics, probability and statistics. Sofia: Labor (**Оригинално заглавие:** *Запрянов З., Маринкова М., 2008. Сборник от задачи и тестове по комбинаторика, вероятности и статистика. София: „Труд“*).