

FRI-216-1-NMITS(S)-03

COMPUTER MODELING INTERACTING SPECIES USING THE HOLLING-TANNER MODEL IN MICROSOFT EXCEL¹⁰⁴

Assoc. Prof. Kristina Ilieva-Stoycheva, PhD

Paisii Hilendarski University of Plovdiv,

Lyuben Karavelov Branch Kardzhali,

Tel.:

E-mail: kristina.ilieva@uni-plovdiv.bg

Abstract: The article shows the computer modeling code of the Holling-Tanner model for interacting predator-prey species in Microsoft Excel. Euler's explicit method is used for the differential problem and the numerical solution is presented with different input parameters.

Keywords: Biomathematics, Predator-prey model, Holling-Tanner model, Microsoft Excel

ВЪВЕДЕНИЕ

Динамиката на биосистемите се описва ефективно с математически модели, включващи диференциални уравнения. Уравненията могат да отчитат взаимодействието между отделните елементи в биосистемите, влиянието на вътрешните фактори върху елементите от биосистемите, развитието на изследваните процеси.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Постановки на модели на взаимодействащи си видове „хищник-жертва“

Един от най-известните модели за междувидово взаимодействие в популация от два вида е моделът на Лотка-Волтера. През 1925 г. Алфред Лотка (Lotka, A., 1925) извежда система от диференциални уравнения за описание на химични реакции на реагенти с осцилиращи концентрации. Няколко години по-късно през 1926 г. Вито Волтера (Volterra, V., 1926) предлага самостоятелно сходен модел, описващ улова на риба в Адриатическо море. Интересен факт за модела „хищник-жертва“ или „ресурси-потребители“ е, че приложението му е не само в химията и екологията, а и в биологията, в медицината, в социалните изследвания, в историята, в икономиката, в радиофизиката и др.

В модела животните-жертви x_1 се размножават с коефициент на прираст g при отсъствие на животните-хищници x_2 .

Животните-хищници умират с коефициент s при липса на храна /животни-жертви/.

Срещата на жертвите с хищниците е приета за пропорционална вероятност от произведението на двете популации. Количеството на жертвите намалява /коефициент a /, количеството на хищниците нараства /коефициент b /.

Моделът на Лотка-Волтера (1) е изразен чрез скоростите на нарастване на популациите от жертви - dx_1/dt и хищници - dx_2/dt :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g \cdot x_1 - a \cdot x_1 \cdot x_2 ; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -s \cdot x_2 + b \cdot x_1 \cdot x_2 . \end{aligned} \tag{1}$$

¹⁰⁴ Докладът е представен пред секция “Природоматематически и технически науки” на 63-тата научна конференция на Русенския университет „Ангел Кънчев“ и Съюза на учените-Русе на 18 октомври 2024 година с оригинално заглавие на български език: КОМПЮТЪРНО МОДЕЛИРАНЕ НА ВЗАИМОДЕЙСТВАЩИ СИ ВИДОВЕ ПО МОДЕЛА НА ХОЛИНГ-ТАНЕР В MICROSOFT EXCEL

Модифицираният модел (2) отчита външното влияние между видовете и в двете уравнения на модела се включват логистични поправки съответно: $(-\gamma \cdot x_1^2)$ и $(-\gamma \cdot x_2^2)$ с коефициент $\gamma > 0$ или $\gamma < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g \cdot x_1 - a \cdot x_1 \cdot x_2 - \gamma \cdot x_1^2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -s \cdot x_2 + b \cdot x_1 \cdot x_2 - \gamma \cdot x_2^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Моделът на Лотка-Волтера е чувствителен при наличие на незначителни въздействащи фактори.

Крауфорд Холинг (Holling, C., 1966) и Джеймс Танер (Tanner, J., 1975) предлагат друг модел, базиран на модела на Лотка-Волтера, но с не затихващи трептения и с граничен цикъл.

В него скоростта на нарастване на популацията от жертви dx_1/dt е сума от три събираеми:

- скорост на размножаване на жертвите при отсъствие на хищници: $(r \cdot x_1)$;
- влияние на вътрешновидовата конкуренция за храна при ограничени ресурси: $(-r \cdot x_1 \cdot x_1/K)$;
- влияние на хищниците при допускане, че не убиват, когато не са гладни: $(-w \cdot x_2 \cdot x_1/(D + x_1))$.

Скоростта на нарастване на популацията на хищниците dx_2/dt е аналогична на модела на Лотка-Волтера при допускане за рядка среща с жертвите.

Ако за поддържането на живота на един хищник са необходими J жертви, популацията от x_1 жертви ще осигури храна за (x_1/J) хищници.

Моделът на ръста на популацията от хищници е $\left[x_2 \cdot \left(s - s \cdot \frac{J}{x_1} \cdot x_2 \right) \right]$.

В диференциални уравнения моделът на Холинг-Танер е:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= r \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) \cdot x_1 - w \cdot x_2 \cdot \frac{x_1}{(D + x_1)}; \\ \frac{dx_2}{dt} &= s \cdot \left(1 - \frac{J}{x_1} \cdot x_2 \right) \cdot x_2, \end{aligned} \quad (3)$$

с коефициенти $r, K, D, J > 0$.

Диференчен метод за задачата на Коши за обикновени диференциални уравнения от първи ред

Уравненията в модела на Холинг-Танер (3) са обикновени диференциални уравнения от първи ред при зададени начални условия /задача на Коши/ в интервал $[a, b]$.

Численото решение от приближените стойности $y(x_i) = y_i$ се търси в точки от равномерна мрежа $x_i = a + i \cdot h$, която е с n на брой еднакви по дължина подинтервала, стъпка $h = (b - a)/n$ и с възли: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$.

Диференциалната задача се апроксимира върху мрежата по явния метод на Ойлер с числено диференциране с разлика напред в точката x_i :

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad y(0) = y_0. \quad (4)$$

Схемата за слой (x_{i+1}, y_{i+1}) придобива вида:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h; \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i). \end{aligned} \tag{5}$$

След прилагане на явния метод на Ойлер за решаване на диференциални уравнения схемата на уравненията от модела на Холинг-Танер (3) е следната:

$$\begin{aligned} x_1^{i+1} &= x_1^i + \Delta t \cdot \left[r \cdot \left(1 - \frac{x_1^i}{K} \right) - \frac{w \cdot x_2^i}{(D + x_1^i)} \right] \cdot x_1^i; \\ x_2^{i+1} &= x_2^i + \Delta t \cdot s \cdot \left[1 - J \cdot \frac{x_2^i}{x_1^{i+1}} \right] \cdot x_2^i. \end{aligned} \tag{6}$$

Числено решение на модела на Холинг-Танер в Microsoft Excel

Математическият модел на Холинг-Танер по диференциалните уравнения (3) и схемата (6) е реализиран в Microsoft Excel със създаване на потребителски формули.

Решението на уравненията е за времеви интервал $t \in [0; 60]$ със стъпка $\Delta t = 0,5$.

На фиг.1 е показан работен лист с въведени потребителски формули и данни.

	A	B	C	D	E	F	G
1	време	жертва	хищник				
2	t	$x_1(t)$	$x_2(t)$				
3	0	1,5	2		$x_1(0)=$	1,5	
4	0,5	1,489286	2,065707		$x_2(0)=$	2	
5	1	1,457568	2,125899		$\Delta t=$	0,5	
6	1,5	1,404173	2,17756		r=	1	
7	2	1,329515	2,216989		K=	7	
8	2,5	1,235367	2,239758		w=	1	
9	3	1,125145	2,240806		D=	1	
10	3,5	1,004102	2,214851		s=	0,2	
11	4	0,879291	2,157386		J=	0,5	
12	4,5	0,759007	2,06652				
13	5	0,651513	1,945434				
14	5,5	0,563218	1,803987				
15	6	0,497186	1,657107				
16	6,5	0,452976	1,519711				
17	7	0,427917	1,401826				
18	7,5	0,418747	1,307366				
19	8	0,42266	1,235906				
20	8,5	0,437641	1,184986				
21	9	0,462416	1,151652				
22	9,5	0,496275	1,133192				
23	10	0,538895	1,127367				
24	10,5	0,590207	1,132433				
25	11	0,650277	1,147072				
26	11,5	0,719214	1,170306				
27	12	0,797081	1,201422				
28	12,5	0,8838	1,239905				
29	13	0,979051	1,285382				

Фиг. 1. Код на математическия модел на Холинг-Танер в Microsoft Excel за параметри:

$$x_1(0) = 1,5; x_2(0) = 2; \Delta t = 0,5; r = 1; K = 7; w = 1; D = 1; s = 0,2; J = 0,5.$$

В клетки от F3 до F11 се въвеждат съответно: стойностите на функциите $x_1(0)$, $x_2(0)$ в началния момент от време, стъпката Δt , коефициентите r, K, w, D, s, J .

В клетки A1, B1, C1 се въвеждат текстово: време, жертва, хищник, а под тях – приетите за тях символи - $t, x_1(t), x_2(t)$.

Клетки A3, B3, C3 се приравняват с потребителски формули на началните условия: $A3 = 0, B3 = F3, C3 = F4$.

В клетка A4 се въвежда формулата A3 + \$F\$5, която се копира вертикално до клетка A123 включително.

В клетка B4 се въвежда:

$$=B3+\$F\$5*(\$F\$6*(1-B3/\$F\$7)-\$F\$8*C3/(\$F\$9+B3))*B3$$

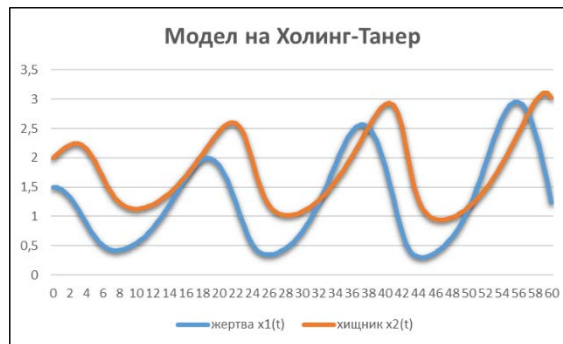
и се копира вертикално до B123 включително.

В клетка C3 се въвежда:

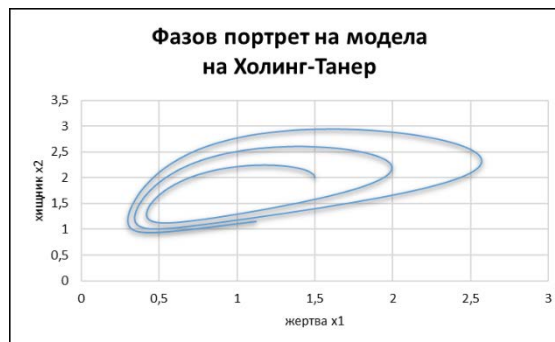
$$=C3+\$F\$5*\$F\$10*(1-\$F\$11*C3/B4)*C3$$

и се копира вертикално до C123 включително.

Резултатите от решенията на диференциалните уравнения се извеждат в графики чрез маркиране на желаните колони и са показани на фиг.2 и фиг.3.

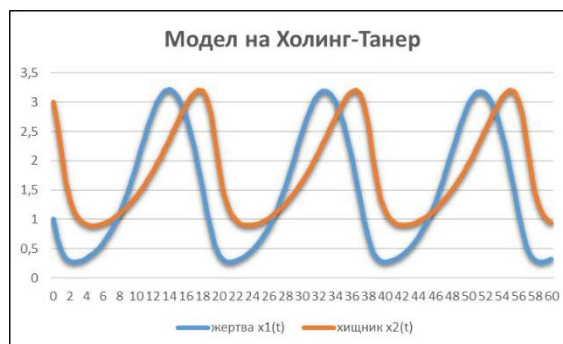


Фиг. 2. Графика на модела на Холинг-Танер в Microsoft Excel за параметри: $x_1(0) = 1,5$; $x_2(0) = 2$; $\Delta t = 0,5$; $r = 1$; $K = 7$; $w = 1$; $D = 1$; $s = 0,2$; $J = 0,5$.

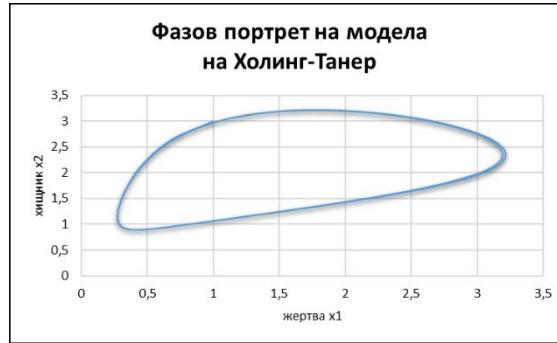


Фиг. 3. Фазов портрет на модела на Холинг-Танер в Microsoft Excel за параметри: $x_1(0) = 1,5$; $x_2(0) = 2$; $\Delta t = 0,5$; $r = 1$; $K = 7$; $w = 1$; $D = 1$; $s = 0,2$; $J = 0,5$.

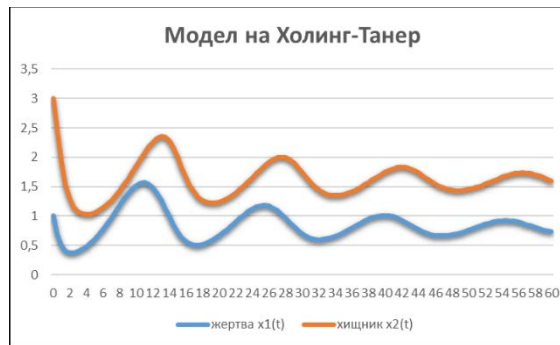
Симулации с два варианта на параметрите са показани от фиг.4 до фиг.6.



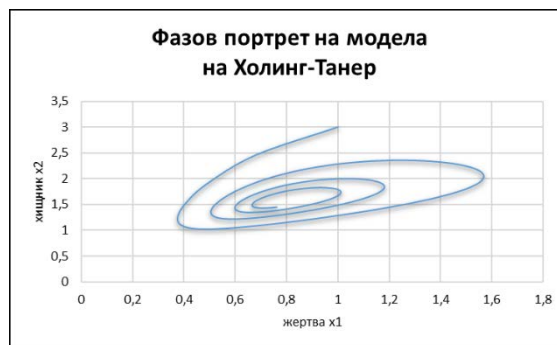
Фиг. 4. Графика на модела на Холинг-Танер в Microsoft Excel за параметри: $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 3$; $\Delta t = 0,5$; $r = 1$; $K = 7$; $w = 1$; $D = 1$; $s = 0,2$; $J = 0,5$.



Фиг. 5. Фазов портрет на модела на Холинг-Танер в Microsoft Excel за параметри: $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 3$; $\Delta t = 0,5$; $r = 1$; $K = 7$; $w = 1$; $D = 1$; $s = 0,2$; $J = 0,5$.



Фиг. 6. Графика на модела на Холинг-Танер в Microsoft Excel за параметри: $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 3$; $\Delta t = 0,5$; $r = 1$; $K = 7$; $w = 1$; $D = 1$; $s = 0,3$; $J = 0,5$.



Фиг. 7. Фазов портрет на модела на Холинг-Танер в Microsoft Excel за параметри: $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 3$; $\Delta t = 0,5$; $r = 1$; $K = 7$; $w = 1$; $D = 1$; $s = 0,3$; $J = 0,5$.

Качественият анализ на система от две обикновени диференциални уравнения може да установи по фазов портрет следните особени точки: устойчив или неустойчив възел, седло, устойчив или неустойчив фокус, център.

Изследването на модела на Холинг-Танер се осъществява чрез въвеждане на различни съотношения между входните параметри за взаимодействащите си видове.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Провеждането на изчислителни експерименти с модели принадлежи към алгоритмичното реализиране на математически модели.

Математическият модел на Холинг-Танер в програмна среда на Microsoft Excel, реализира изчислителни експерименти след задаване на различни входни параметри и предоставя възможности за изследване на поведението на модела от нелинейната динамика.

REFERENCES

Butcher, C., (2008). Numerical Methods for Ordinary Differential Equations Second Edition. The University of Auckland John Wiley & Sons Inc.

Holling, C., (1966). The functional response of invertebrate predators to prey density. Memoirs of the Entomological Society of Canada 98(S48):5–86.

Lotka, A., (1925). Elements of Physical Biology. Williams and Wilkins, Baltimore.

Sendov, B., V. Popov, (1976). Числени методи. Purva chast., Sofia, Nauka i izkustvo (*Оригинално заглавие: Сендов, Б., В. Попов, 1976. Числени методи. Първа част, София, Наука и изкуство.*).

Tanner, J., (1975). The stability and intrinsic growth rates of prey and predator populations. Ecology 56:855–867.

Volterra, V., (1926). Fluctuations in The Abundance of A Species Considered Mathematically. Nature, 118, 558-560.