

FRI-2G.405-1-ERI-10

DEVELOPING GEOMETRY PROBLEMS FOR 7-TH GRADE BY SEVENTH GRADERS¹²

Irina Vasileva, MSc

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse "Angel Kanchev"

Tel: +359 899908689

E-mail: vasileva_i_p@abv.bg

Pr. Assist. Prof. Ralitsa Vasileva-Ivanova, PhD

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse "Angel Kanchev"

Tel: +359 884109719

E-mail: rivanova@uni-ruse.bg

Abstract: *The paper presents the problem posing method, which enhances students' learning activities to make them more active learners and confident problem solvers. Also are included the opinions of some researchers on the importance of its use. In this way, students get the opportunity to develop their creativity, independent thinking and logic, to understand and master the material better, handling more freely the different theorems, properties and signs. The paper presents developed algorithms of Geometry for 7th grade. They explain step by step how to approach the formulation of problems and give examples. In general, the principle is to choose a "scenario" of the problem and go from back to front. At the end of each algorithm, the problem to the students is described - what requirements their problem should cover. All the presented algorithms are tested and 6 seventh graders from different schools have made geometry problems based on them.*

Key words: *problem posing, seventh graders, algorithms, geometry problems.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Съвременният начин на живот води до формиране на нови и различни изисквания към знанията и уменията, които всеки млад човек трябва да притежава, за да постигне успешна реализация в професионален и личен план. Това, от своя страна изисква прилагането на нови методи в учебния процес, които да са насочени към прилагане на тези знания, и превръщането им в умения. Те могат да се комбинират като това улеснява придобиването на ключови компетентности и развитие на личностни качества в учениците. Приложими са в различни сфери, включително и в обучението по математика, която е една от учебните дисциплини, които учениците намират за трудни и безинтересни. Всъщност математиката присъства навсякъде около нас и е ключов инструмент за успешното справяне с различни предизвикателства в личния и професионалния живот. Ползите са многобройни: развитие на логическо мислене, усъвършенстване на способността за абстрактно мислене, помага да се правят прогнози и планове и на човека да си намери добре платена работа, а и в бита винаги трябва да се изчисли нещо. Прилагането на система от методи помага на обучаемите да: намират информация, разкриват взаимовръзки, развиват критичното си мислене, стимулират комуникативните си умения, презентират, интерпретират, вземат правилни решения, имат правилна самооценка за знанията и уменията си и за своите възможности. Такива иновативни методи, които успешно се прилагат в обучението по математика са: *Метод на обърната класна стая, интердисциплинарни уроци и STEM подход, игри с математически*

¹² Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 25 октомври 2024 г. в секция „Образование – изследвания и иновации“ с оригинално заглавие на български език: СЪСТАВЯНЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ ЗА 7 КЛАС ОТ СЕДМОКЛАСНИЦИ.

задачи, Проектно базирано обучение, използване на адаптивни образователни платформи, Problem Posing - поставяне на проблем/задача.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Използването на метода Problem Posing - поставяне на проблем/задача може да бъде ефективен начин за стимулиране на учениците да се ангажират по-активно с учебния процес и да развиват разнообразни умения и способности.

Според Айнщайн (Einstein, 1966) „формулирането на проблем често е по-съществено от неговото решение, което може да бъде просто въпрос на математически или експериментални умения. Повдигането на нови въпроси, нови възможности, разглеждането на стари проблеми от нов ъгъл изисква творческо въображение и бележи истински напредък в науката“.

„Моделът за поставяне на проблеми има предимството, че подобрява учебните дейности на учениците, за да бъдат по-активни в ученето и уверени при решаването на задачи“ (Setiawan et al., 2018). Освен това Kojima (Kojima et al., 2015) подкрепя становището, че „problem posing“ е основен метод, който помага на учениците да решават задачи. По подобен начин Niss и Hojgaard (Niss et al., 2019) заявяват, че „problem posing“ е част от компетентността за решаване на задачи.

Създаването на задачи от ученици е разпространен метод в началното образование, но в основното и средно образование намира ограничено приложение по света, а в България – никакво, освен в някои извънкласни допълнителни занимания. А той има редица положителни ефекти: по-добро разбиране и усвояване на материала, стимулира самостоятелното мислене и логиката, развива креативността, усилва мотивацията, подпомага самооценката и развитието на критично мислене, подготвя за реални ситуации, укрепва мотивацията за учене през целия живот. За успешното прилагане на този метод е необходима предварителна подготовка на учениците, включително в психологически и емоционален аспект. Като всяко ново нещо, с което се сблъскват, първоначално те са притеснени. Затова е препоръчително многократно прилагане на метода, например чрез: периодично създаване на задачи с различна сложност с помощта на учителя, по време на учебния процес, когато това е подходящо; съставяне на нова задача от учителя в сътрудничество с учениците в рамките на пет минути насочване на учениците относно етапите, които да следват, за да съставят задачи успешно. Това изисква разработването на алгоритми, които стъпка по стъпка да демонстрират как могат да се съставят задачи, така че да се минимизира риска за допускане на грешки както и примери за тяхното приложение на практика.

Обучението и усвояването на материала в 7 клас е голямо предизвикателство за ученици, родители и учители. В края на учебната година се полага изпит – Национално Външно Оценяване (НВО), от който зависи в кое училище ще продължи ученикът обучението си и играе важна роля при определянето на бъдещето му образование и кариерно развитие. Като се има предвид големия обем нови знания, включени в учебната програма за 7 клас и въпреки че часовете по математика за 7 клас са увеличени от 4 на 5 часа седмично и според препоръчителното разпределение близо 40% от часовете са за упражнения и обобщения, все още може да се почувства липса на време за затвърждаване на знанията поради голямото количество нови знания за усвояване. Недостатъчното затвърждаване на усвоените знания може да доведе до затруднения и демотивация сред учениците. В такъв контекст, развиването на логиката, творческото мислене, овладяването на математическите правила и мотивацията стават още по-значими за успешната подготовка на учениците за НВО, която изисква баланс между обширен материал, практическа подготовка и стимулиране на логическото мислене на учениците. Този процес е от голямо значение за тяхното бъдеще и успешно представяне на изпита. Затова е важно и полезно в учебния процес да се включат по-нови и разнообразни методи, които по не толкова натоваарващ начин да провокират учениците да вложат максимума от своите знания и умения – например чрез съставяне на задачи.

С цел апробиране на метода са разработени алгоритми, които да водят стъпка по стъпка учениците как да съставят геометрични задачи и по-конкретно задачи за основни геометрични фигури, триъгълници и успоредници, които са включени в учебната програма за 7 клас. Основен принцип е да се тръгне от решението (крайния резултат) и да се върви стъпка по стъпка към условието на задачата. Съставянето на задачи, дава възможност на учениците да „комбинират“ различните теореми, свойства и признаци, като по този начин ги усвоят по-добре и по-трайно. Шест седмокласници от различни училища в град Русе са съставяли задачи по предложените алгоритми.

Алгоритъм за решаване на геометрични задачи

Стъпки:

1. Решаваме какъв триъгълник/успоредник ще използваме и го начертаваме.

Забележка: Правим голям чертеж, на който да има място за нанасяне на много информация.

2. Набелязваме си кои свойства ще използваме (ъглополовяща, симетрала, медиана, височина, сбор на вътрешни/външни ъгли, върхни, съседни ъгли, диагонали и т.н). Нанасяме ъглите на триъгълника.

3. Нанасяме на чертежа всички равни ъгли и страни/отсечки, мерки на ъгли, дължини на отсечки, като използваме познатите свойства и теореми и внимаваме да не нанесем неверни/взаимноизключващи се неща.

4. Започваме поетапно да премахваме/зачеркваме някои от нанесените при предходната стъпка равни ъгли и отсечки и техните мерки, като внимаваме да оставим на чертежа достатъчно налична информация, за да може да бъде намерено/доказано търсеното. Може да се прави на един чертеж или при необходимост да се правят нови чертежи, като поетапно се зачерква информация.

5. Съставяме условието на задачата.

6. Решаваме задачата по поставеното условие, като я описваме подробно, за да сме сигурни, че предоставената информация е достатъчна и търсеното е възможно за намиране/доказване.

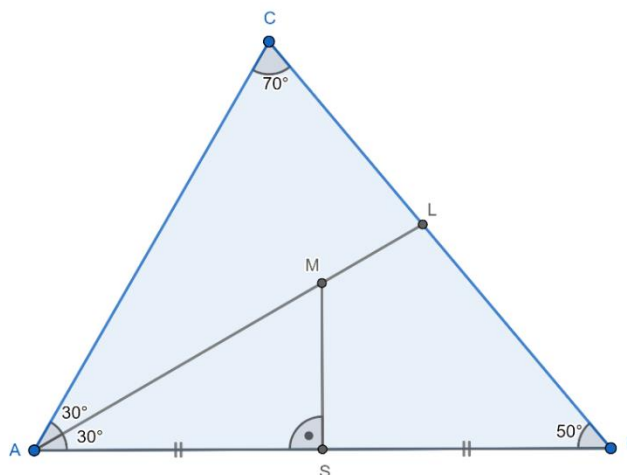
Пример:

1. Решаваме каква фигура ще използваме и я начертаваме.

Избирам да работя с разностранен остроъгълен $\triangle ABC$ и го начертавам (фиг. 1).

2. Набелязваме си кои свойства ще използваме (ъглополовяща, симетрала, медиана, височина, сбор на вътрешни/външни ъгли, върхни, съседни ъгли и т.н.). Нанасяме ъглите на триъгълника. *Забележка:* В почти всяка задача се използва сбор на ъгли в триъгълника. Начертаваме избраните.

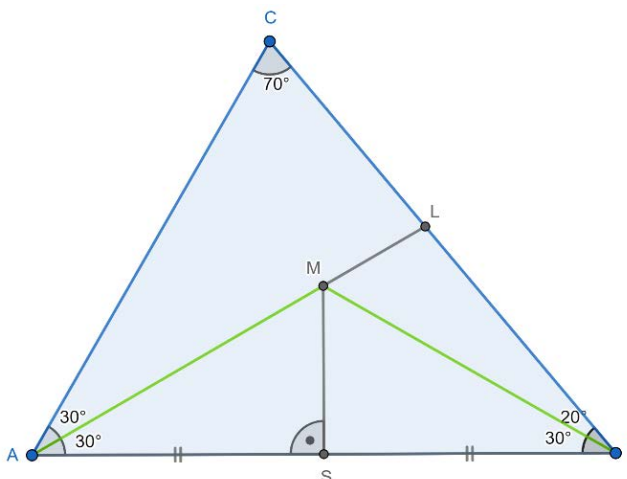
Избирам да използвам љглополовяща и симетрала. Начертавам ги. Започвам да нанасям ъгли, като първо избирам ъглите на $\triangle ABC$ – например 60° , 70° , 50° . Ђгълът 60° е този, който се разполовява от љглополовящата - сещам се, че симетралата образува правољгълен триъгълник и ще е удобно в него да има љгъл 30° или 60° (фиг. 1).



Фигура 1

3. Нанасяме на чертежа всички равни ъгли и страни/отсечки, мерки на ъгли, дължини на отсечки, като използваме познатите свойства и теореми и внимаваме да не нанесем неверни/взаимноизключващи се неща.

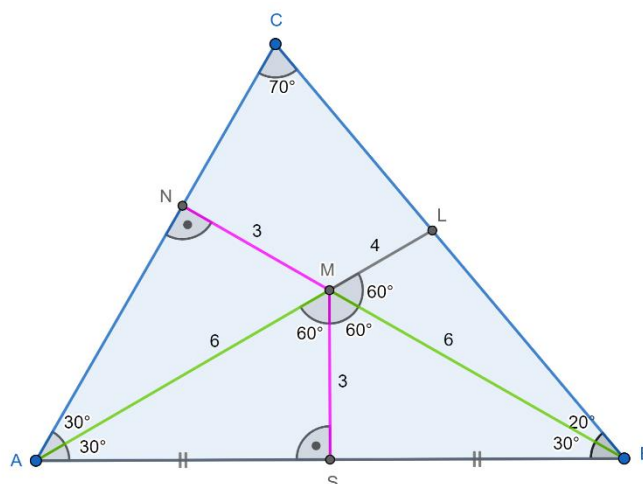
Нанасям равните отсечки $AS = SB$, $AM = MB$ (всяка точка от симетралата е на равни разстояния от крайщата на отсечката $\Rightarrow \triangle ABM$ – равнобедрен) (фиг. 2).



Фигура 2

Сега мога да изчисля и останалите ъгли на чертежа. Също така мога да нанеса някои отсечки. Виждам, че ако знам дължината на MB , то ще мога да намеря AM (от равнобедрения триъгълник) и MS (катет и хипотенуза в правоъгълен триъгълник с остър ъгъл 30°). А ако знам и дължината на ML , то ще мога да намеря и цялата ъглополовяща AL . Затова избирам $MB = 6\text{cm}$ и $ML = 4\text{cm}$. Вече мога да намеря дължините на останалите отсечки вътре в триъгълника (фиг. 3).

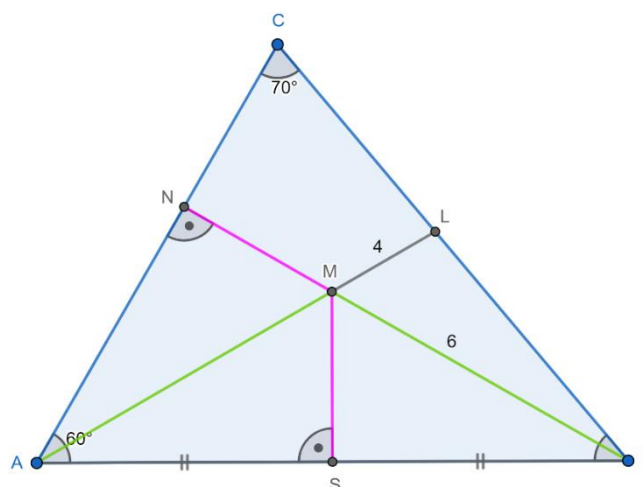
Освен това мога да използвам, че всяка точка от ъглополовящата е на равни разстояния от раменете на ъгъла, така че постоявам допълнително $MN \perp AC$.



Фигура 3

4. Започваме поетапно да премахваме/зачеркваме някои от нанесените при предходната стъпка равни ъгли и отсечки и техните мерки, като внимаваме да оставим на чертежа достатъчно налична информация, за да може да бъде намерено/ доказано търсеното.

Виждам, че ако зачеркна $\angle BAL$ и $\angle ABC$, ще са ми известни мерките на $\angle CAL$ и $\angle ACB$ и чрез тях ще мога да намеря зачеркнатите ъгли. Също така вече установих, че ако зная дължината на MB , мога да намеря всички други отсечки на чертежа, освен страните на $\triangle ABC$ (фиг. 4).



Фигура 4

5. Съставяме условието на задачата.

Задача: Даден е $\triangle ABC$, в който ъглополовящата AL на $\angle BAC$ и симетралата на AB се пресичат в т. M . Ако $\angle MAC = 30^\circ$, $\angle ACB = 70^\circ$, $ML = 4$ cm и $BM = 6$ cm, намерете:

- Мерките на ъглите на $\triangle ABC$.
- Мярката на $\angle BML$
- Дължините на ъглополовящата AL и разстоянието от т. M до AC .

6. Решаваме задачата по поставеното условие, като я описваме подробно, за да сме сигурни, че предоставената информация е достатъчна и търсеното е възможно за намиране/доказване.

Дадено: $\triangle ABC$; $\angle MAC = 30^\circ$
 $\angle ACB = 70^\circ$,

Търси се: а) ъглите на $\triangle ABC$
 б) $\angle BML = ?$; в) $AL = ?$, $MN = ?$

$ML = 4\text{cm}$ и $BM = 6\text{cm}$

Решение:

а) AL ъглополовяща $\Rightarrow \angle BAM = \angle MAC = 30^\circ \Rightarrow \angle BAC = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$
 $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB) = 50^\circ$

б) SM – симетрала $\Rightarrow AS = SB, AM = BM, \angle ASM = \angle BSM = 90^\circ$
 $\angle MAB = \angle MBA = 30^\circ$,
 $\angle AMS = \angle BMS = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle BML = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$

в) $AM = BM = 6\text{cm} \Rightarrow AL = AM + ML = 6 + 4 = 10\text{cm}$.

$\triangle ASM$ – правоъгълен и $\angle MAS = 30^\circ \Rightarrow SM = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3\text{cm}$.

AM – ъглополовяща $\Rightarrow SM = MN = 3\text{cm}$.

Оказва се, че в задачата съм използвала следните елементи/свойства/теореме:

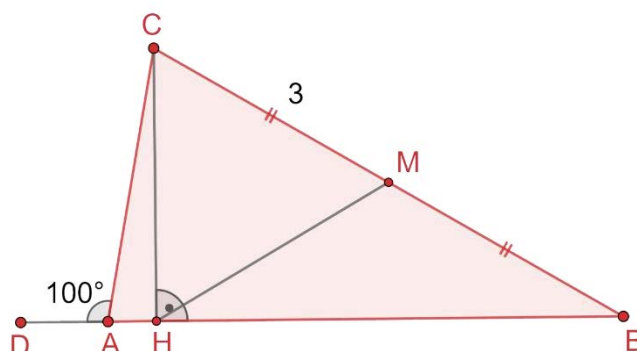
- ✚ Сбор на ъгли в триъгълника
- ✚ Сбор на съседни ъгли
- ✚ Свойство на симетралата в триъгълника
- ✚ Свойство на ъглополовящата в триъгълника
- ✚ Теорема за правоъгълен триъгълник с остър ъгъл 30°

Задание: Да се състави геометрична задача с минимум 2 подточки, като се използват поне 3 изучавани елемента/свойства/правила/теореме.

За илюстрация на резултата от апробирането на алгоритъма, може да се разгледа следната задача, съставена от един от учениците:

Задача: В остроъгълен $\triangle ABC$ външният ъгъл при върха A е 100° , а $\angle ABC : \angle ACB = 3 : 7$. Ако се знае, че $AB : BC = 3 : 2$ и $CM = 3\text{cm}$ (т. M – среда на BC), намерете:

а) ъглите на $\triangle ABC$; б) P_{HMC} (CH – височина); в) S_{ABC}



Фигура 5

Решение:

а) $\angle DAC = 100^\circ = \angle ACB + \angle ABC \Rightarrow 7x + 3x = 100^\circ \Rightarrow x = 10^\circ$
 $\angle ABC = 30^\circ$ и $\angle ACB = 70^\circ$; $\angle BAC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

б) $\triangle HBC$ – правоъгълен и HM – медиана $\Rightarrow CM = MB = HM = 3\text{cm}$

$\triangle HBC$ – правоъгълен и $\angle ABC = 30^\circ \Rightarrow CH = \frac{1}{2}BC = 3\text{cm}$

$P_{HMC} = CH + HM + CM = 9\text{cm}$

в) $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2} = \frac{AB}{6} \Rightarrow AB = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9\text{cm}$; $S_{ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{9 \cdot 3}{2} = 13,5\text{cm}^2$

Учениците са оценили качествено и количествено трудността в скала от 1 до 10. Според тях, геометричните задачи са с трудност малко над средната. Най-големи

затруднения са срещнали в това да съвместят използваните правила, така че да не получат взаимно изключващи се неща. Още по-полезно би било, ако след съставяне на условието на задачата, тя бъде решена от друг ученик, тъй като той би могъл да забележи и открие грешки и неточности, които са убегнали на автора на задачата (табл. 1).

Таблица 1

Име	Формули за съкратено умножение	Задачи за движение	Задачи за работа	Ъгли и триъгълници	Четириъгълници	Слъбковидна диаграма	Кръгова диаграма
Емануела	2	10	9	7	7	8	8
Берк	1	9	8	5	6	8	7
Симона	2	8	8	5	5	6	7
Ива	1	8	8	6	4	2	3
Елиноор	4	6	6	5	5	7	5
Виктория	2	7	3	7	8	2	2
Средна оценка (1-10)	2	8	7	5,8	5,8	5,5	5,3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

След анализ на резултатите при апробиране на алгоритъма, може да се обобщи, че съставянето на задачи е метод, който може да бъде използван, както в часовете от задължителната подготовка, така и при разширената подготовка по математика. Учениците могат да се справят успешно и да съставят правилни и интересни задачи, особено ако вече имат опит и с тях е работено в учебните часове.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2024-ФПНО-03, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

- Einstein A., L. Infeld, Evolution of Physics (1938, 1966).
- Kojima K., Miwa K., Matsui T. Experimental study of learning support through examples in mathematical problem posing. Research and Practice in Technology Enhanced Learning (2015). <https://doi.org/10.1007/s41039-015-0001-5>.
- Niss M., T. Hojgaard Mathematical competencies revisited. Educational Studies in Mathematics, (2019). <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>.
- Setiawan A., E. Putro - Implementation of Problem Posing Learning on Conceptual Understanding and Adaptive Reasoning (2018) https://www.researchgate.net/publication/329938087_Implementation_of_Problem_Posing_Learning_on_Conceptual_Understanding_and_Adaptive_Reasoning.
- Vasileva, I., scientific advisor Ralitsa Vasileva-Ivanova, Developing systems of problems for 7th grade by seventh graders (2024), master's degree thesis, University of Ruse, (**Оригинално заглавие:** Съставяне на системи от задачи за 7 клас от седмокласници, Дипломна работа, Русенски университет (2024)).