

SAT-2G.405-1-ERI-17

THE METHOD OF MATHEMATICAL INDUCTION IN EXTRACURRICULAR WORK IN MATHEMATICS¹⁹

Darin Rajnov, MSc Student

Department of Mathematics,
Faculty of Natural Sciences and Education
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: 0888 521 877
E-mail: rajnovdarin@gmail.com

Assoc. Prof. Yuriy Kandilarov, PhD

Department of Mathematics,
Faculty of Natural Sciences and Education
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: 0889 518 824
E-mail: ukandilarov@uni-ruse.bg

Abstract: The paper is devoted to the application of the method of mathematical induction in extracurricular work in mathematics. At the beginning, the theoretical foundations of mathematical induction are presented. Various applications of the method are then considered: proof of identities (sums of algebraic expressions; trigonometric identities); proving inequalities; proving divisibility; recurrent sequence; Chebyshev polynomials; application in combinatorics; solving geometric problems (constructive, combinatorial). Sample problems for self-dependent work are suggested. Conclusions are made about the application of the method to different levels of education.

Key words: Mathematical induction, Education.

ВЪВЕДЕНИЕ

Изучаването на математика в училище има за основна цел – да научи учениците да мислят логично и да правят различни умозаклучения, чрез доказване на твърдения. В настоящата разработка са разяснени основните правила при решаването на математически задачи чрез индуктивни заключения. Тя ще послужи за подготовка и усъвършенстване на учениците в извънкласната дейност, която е продължение на редовния учебен и възпитателен процес в помощ на учителя. Математическата индукция е метод за математическо доказателство, използван за доказване на свойствата на естествените числа и на други множества, еквивалентни („равномощни“) на множеството на естествените числа. Терминът „индукция“ (лат. Indukto - насочване) означава метод за извършване на умозаклучение от частното към общото. Типична е употребата ѝ за доказване, че дадено твърдение е вярно за всички естествени числа (напр. Рólya, G., 1954).

Този метод може да се обобщи за доказване на твърдения относно по-обща добре обосновани структури като графи, дървета, масиви и т.н. Това обобщение е известно като структурна индукция и се използва в математическата логика (*дискретната математика*) и информатиката.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Методът на математическата индукция (ММИ) е особен метод на математическо доказателство, който позволява въз основа на частни наблюдения да се правят заключения за съответни общи закономерности.

¹⁹ Докладът е представен на научната сесия на 26 октомври 2024 г. в секция „Образование – изследвания и иновации“ с оригинално заглавие на български език: МЕТОДЪТ МАТЕМАТИЧЕСКА ИНДУКЦИЯ В ИЗВЪНКЛАСНАТА РАБОТА ПО МАТЕМАТИКА.

Принципът на математическата индукция играе много важна роля за логическото изграждане на аритметиката на естествените числа.

Доказателствата, базирани на математическата индукция, за дадено свойство на всички естествени числа обикновено се свеждат до три стъпки (VRDA, A., 1977):

1. Доказателство на верността на свойството за $n=1$ (наричаме **основа на индукцията**);
2. Допускане, че разглежданото свойство е вярно за $n=k$ (наричаме индукционно предположение или **индукционна хипотеза** „ИХ”);
3. Доказателство, че твърдението е вярно за $n=k+1$, в което се използва допуснатата индукционна хипотеза (наричаме **индукционна стъпка** „ИС”);

Вследствие на това можем да направим извода, че твърдението (Хипотезата) е вярно за всяко естествено число n .

Крайка към системното логическо изграждане на аритметиката е направил италианският математик Джузепе Пеано, който през втората половина на 19-ти век въвежда пет аксиоми за математическата индукция.

Аксиомите на Пеано за естествените числа гласят следното:

Аксиома 1. 1 е естествено число.

Аксиома 2. За всяко естествено число съществува единствено естествено число, което се нарича „наследник” на това число.

Аксиома 3. 1 не е наследник на никое естествено число.

Аксиома 4. От $x^n = y^n$, където x^n и y^n са наследници на естествените числа x и y , следва че $x=y$.

Аксиома 5. Нека N е някое множество от естествени числа, което притежава следните две свойства:

- $1 \in N$;
- Ако естествено число $x \in N$, то и $(x + 1)$ принадлежи на N .

Тогава N е множество на всички естествени числа.

Петата аксиома на Пеано се нарича „**принцип на пълната математическа индукция**” (заключение от частното към общото) и намира приложение не само в аритметиката, но и във всички дялове на математиката.

Въз основа на петте аксиоми на Пеано, пълната математическа индукция се прилага равнозначно и в аритметиката на целите, рационалните, реалните и комплексните числа с чиято помощ се доказват твърдения, които са в сила за всеки елемент или почти всеки елемент от даденото множество. Повечето математически доказателства стартират посредством предположения и заключения и завършват със словосъчетанието „което трябваше да се докаже“.

През 1843 г. френският математик Бертран въз основа на проверки в частни случаи допуснал, че е вярна следната теорема, (известна като Постулат на Бертран).

Теорема 1. За всяко естествено число n , по-голямо от 7, съществува поне едно просто число, заключено между числата $\frac{n}{2}$ и $n - 2$.

Тази хипотеза на Бертран е била потвърдена по-късно през 1852 г. от руския математик Чебишов, който доказал верността ѝ.

През 1770 г. английският математик Уоринг пак въз основа на проверки в многобройни частни случаи предположил, че е вярно следното:

Теорема 2. За всяко естествено число $n > 2$, съществува такова естествено число m , че всяко естествено число p може да се представи като сума на m на брой n -ти степени на подходящи цели числа $a_1, a_2, \dots, a_m$:

$$p = a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n. \quad (1)$$

Следващите две теореми са изказани от Ферма без доказателство:

Теорема 3. Ако n е цяло число, а p – просто число, то числото $p^n - n$ се дели на p .

Тази теорема е доказана за пръв път от немския математик Лайбниц към 1683г. Тя се нарича „малка теорема на Ферма”.

Теорема 4. *Всяко просто число от вида $4n+1$ може да се представи по единствен начин като сума на квадрати на две естествени числа; никое просто число от вида $4n-1$ не може да се представи като сума на квадрати на две естествени числа.*

Индуктивният метод в аритметиката на естествените числа ще формулираме по следния начин:

Твърдение 1. *Нека M е множество, което има тези две свойства:*

I) $1 \in M$;

II) *За всяко естествено число n важи: ако $n \in M$, тогава $n+1 \in M$.*

Тогава M е множеството на всички естествени числа.

Лесно можем да видим валидността на този принцип:

Според I) $1 \in M$;

Според II) Следва, че $2 \in M$. От това отново според (II), следва че $3 \in M$, оттам и

$4 \in M$ и т.н. Така че очевидно можем да стигнем до всяко естествено число.

Следователно множество M съдържа всички естествени числа.

Твърдение 2. *Нека M е множество със следните свойства:*

III) *За цяло число k е валидно $k \in M$;*

IV) *За всяко цяло число $c \geq k$ е валидно: Ако $c \in M$, то и $(c+1) \in M$.*

Тогава множеството M съдържа всички цели числа, по-големи или равни на k .

Тази формулировка на ММИ позволява да се доказват твърдения „за всяко цяло число, по-голямо или равно на числото k “, като се използват следните две помощни твърдения:

1) Твърдението е вярно за някое цяло число k ;

2) За всяко цяло число $c \geq k$: ако твърдението е вярно за числото c , то тогава твърдението е вярно и за числото $c+1$.

Твърдение 3. *Нека M е множество, което има следните свойства:*

V) $1 \in M$;

VI) *За всяко естествено число n се прилага следното: ако $k \in M$ за всички естествени числа $k \leq n$, то също и $n+1 \in M$.*

Тогава множеството M съдържа всички естествени числа

Тази формулировка на ММИ позволява да се доказват твърдения „за всяко цяло число“, като се използват следните две помощни твърдения:

3) Твърдението е в сила за числото 1;

4) За всяко естествено число n е валидно следното:

Ако теоремата е валидна за всички естествени числа, по-малки от $n+1$, то тя е валидна и за числото $n+1$.

Ето един различен начин за приложение на ММИ:

Твърдение 4. *Нека M е множество, което има следните свойства:*

VII) $1 \in M, 2 \in M, \dots, r \in M$;

VIII) *За всяко естествено число n : ако $n \in M, (n+1) \in M, (n+r-1) \in M$, то и $(n+r) \in M$*

Тогава множеството M съдържа всички естествени числа.

Ако искаме да докажем, че дадено твърдение е валидно за всяко естествено число, то е достатъчно:

5) Твърдението да е вярно за числата $1, 2, \dots, r$.

6) За всяко естествено число n е вярно: Ако твърдението е вярно за числата $n, n+1, \dots, n+r-1$, то твърдението е вярно и за числото $n+r$.

Досега бяха формулирани няколко варианта на ПМИ, в които се твърди, че определено множество M съдържа всички естествени числа, или всички цели числа, по-големи от естественото число k . Въпреки това, понякога е полезна и следната версия, в която се твърди, че определено множество M съдържа всички естествени числа до определена горна граница.

Твърдение 5. *Нека n е естествено число и нека M е множество, което има следните свойства:*

(IX) $1 \in M$;

(X) *За всяко естествено число $n < k$, ако $n \in M$, следва че и $(n+1) \in M$, тогава множеството M съдържа всички естествени числа $1, 2, \dots, k$.*

Ако искаме да докажем, че теоремата е валидна за естествените числа $1, 2, \dots, k$, тогава е достатъчно да докажем:

9) Теоремата е в сила за числото 1;

10) За всяко естествено число $n < k$ е вярно следното: Ако теоремата е вярна за числото n , то тя е валидна и за числото $n+1$.

Своеобразен вариант на принципа на математическата индукция се дължи на френския математик Коши и се нарича „принцип на ретроградната индукция”.

Твърдение 6. *Нека M е множество от естествени числа, което съдържа числото 1, което с числото 2^{n-1} съдържа и числото 2^n за всяко естествено число n , и което с числото t съдържа всички по-малки от t естествени числа. Тогава M е множеството на всички естествени числа.*

Забележка: В така изказаната форма на принципа на ретроградната индукция числото 2 не играе съществена роля и може да се замени с всяко естествено число p , по-голямо от 2.

Методът на математическата индукция се прилага за доказване на известни съждения или за дефиниране на известни понятия, зависещи от естествен параметър n , т.е. от променлива величина, която може да приема само естествени стойности. ММИ е приложен за първи път от немския математик Грасман, когато е дефинирал понятията „сума“ и „произведение“ на две естествени числа.

Аксиомата за най-малкия елемент твърди, че множеството от естествени числа има най-малък елемент числото 1. В някои случаи, за удобство, е удачно и числото 0 да бъде добавено към множеството на естествените числа. Също така, както споменахме по-горе, в някои задачи вместо от $n=1$ ще се прилага математическа индукция, като проверката на хипотезата се прави от друго естествено число, по-голямо от 1.

Понякога се налага да правим предположение, като приемаме, че дадено твърдение е вярно за две последователни числа $n-1$ и n и доказваме, че то е вярно и за числото $n+1$. В този случай, първо е необходимо да проверим твърдението за $n=1$ и $n=2$. След това доказваме верността на предположението за $n+1$, което доказва верността за всички естествени числа.

Ще поясним прилагането на ММИ върху задачата за намиране на сумата на първите n квадрата на естествените числа. Ще докажем, че е вярна следната формула:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

С директна проверка се установява верността на равенството при $n=1$:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

Изказваме предположението, че тази формула е валидна за всички естествени числа n . За да докажем това, допускаме, че твърдението е вярно за $n=k$, т.е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Ще докажем, че то е вярно и при $n=k+1$. Чрез прибавяне на $(k+1)^2$ към двете страни на това равенство се получава:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ (k+1) \left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right] &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \\ = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}, \end{aligned}$$

което и трябваше да се докаже. Правим извода, че твърдението (формулата) е вярна за всяко естествено число n .

ПРИЛОЖЕНИЯ

В разработката са представени примери на приложението на метода на математическата индукция (ММИ) при решаването на различни математически задачи.

Първо са разгледани приложенията в различни дялове от алгебрата (напр. Sominskii, I. 1965).

Такива примери са доказателствата на алгебрични суми и алгебрични и тригонометрични тъждества (напр. Vavilov, V. 1987):

Пример 1. Намерете сумата:

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}. \quad (3)$$

Пример 2. Да се докаже следното твърдение:

$$3 + 11 + \dots + (8n - 5) = 4n^2 - n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Пример 3. Докажете тъждеството, ако $\sin \alpha \neq 0$:

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \dots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}. \quad (5)$$

Разгледани са и задачи от типа алгебрични неравенства.

Пример 4. Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 2$ е изпълнено неравенството:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}. \quad (6)$$

Пример 5. Неравенството на Бернули гласи, че за всяко реално число $x > -1$ и за всяко естествено число n е в сила: $(1+x)^n > 1+nx$. (7)

Това неравенство се използва често като решаваща стъпка при доказването на други математически неравенства.

Интересен вариант е при който индукцията прави скок напред и се връща назад. Такава индукция се нарича индукция на Коши или **ретроградна индукция (виж Твърдение 6)**, теорията за която се дава в следните теореми:

Теорема 1.

- 1) Нека твърдението T е вярно за $n=1$;
- 2) От $T(n) \rightarrow T(2n)$;
- 3) От $T(n) \rightarrow T(n-1)$;

Тогава $T(n)$ е вярно за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.

- 1) Нека твърдението T е вярно за $n=1$;
- 2) От $T(n) \rightarrow T(f(n))$ за всяка целочислена функция $f(n) > n$;
- 3) От $T(n) \rightarrow T(n-1)$;

Тогава $T(n)$ е вярно за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Пример 6. Неравенство на Коши.

Докажете, че средното геометрично на няколко положителни числа е по-малко или равно на средно им аритметично, т.е. ако $a_1, a_2, \dots, a_n$ са n положителни числа, то е вярно:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \quad (8)$$

ММИ намира приложение и в задачи за доказване на делимост:

Пример 7. Да се докаже, че числото $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ се дели на 133 за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Редица изброителни задачи се решават трудно, или изобщо не могат да се решат с помощта на познатите термини за вариации, пермутации и комбинации и формулите за тяхното броене. Такава техника предлагат рекурентните редици (РР) и рекурентните уравнения (РУ). Такъв вид са задачи с доказателства, чрез използване на свойствата на числата на Фибоначи в алгебрата и геометрията.

Пример 8. Пресметнете сумата $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n} = ?$, където $a_{3n}, n = 1, 2, \dots$ са съответни членове на редицата на Фибоначи.

Отделено е внимание и на решаването на геометрични задачи чрез ММИ.

Най-естественото приложение на метода на математическата индукция в геометрията е много близко до използването на този метод в теорията на числата и алгебрата. Ето някои изчислителни и построятелни задачи (Golovina, L. & Yaglom, I. 1961).

Пример 9. В равнината има краен брой различни прави, които я разделят на части. Докажете че е възможно тези части да бъдат оцветени с два цвята, така че всяка част да е оцветена в различен цвят и че няма две съседни части да са оцветени с един и същи цвят.

Пример 10. Намерете правилото за пресмятане на броя $P(n)$ на начините, по които изпъкналият n -ъгълник може да бъде разделен на триъгълници от непресичащи се диагонали.

Пример 11. Дадени са n произволни квадрата. Да се докаже, че те могат да се разрежат на части така, че от получените части може да се състави нов квадрат.

ММИ може да се прилага и при доказателства в стереометрията.

Пример 12. Даден е тетраедър, на който четирите страни са номерирани с 1, 2, 3 и 4, и е разделен на по-малки тетраедри, така че всеки два от тетраедрите на деленето или изобщо нямат общи точки, или имат общ връх, или имат общ ръб (но не част от ръб), или имат обща повърхнина (но не част от лице). Всички върхове на получените малки тетраедри са номерирани с еднакви числа 1, 2, 3 и 4, а всички върхове, лежащи на лицето на големия тетраедър са номерирани с три числа, които номерират върховете на това лице и всички върхове, лежащи на всеки ръб на големия тетраедър, са номерирани с две числа, които номерират краищата на ръба.

Докажете, че има поне един малък тетраедър, всичките четири върха, на който са номерирани с различни числа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящата тема е подходяща предимно за извънкласна работа по математика както за ученици от 7 до 12 клас, така и за студенти, желаещи да научат повече за приложението на метода на математическата индукция, особено бъдещи компютърни специалисти. Една от целите на тази разработка е да даде материал на учителя и на учениците да се развиват в една интересна и важна област на математиката, като се разкрият неограничените възможности за работата с множества от числа, която ни предлага ММИ.

Тази тема добавя както базови познания върху самия метод, така и методическото прилагане на различни техники при решаването на разнообразни по вид задачи, чрез логически разсъждения и доказателства.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2024-ФПНО-03, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Golovina, L., Yaglom, I. (1961) Popular lectures on mathematics: Induction in Geometry, Moscow, FIZMATGIZ (*Оригинално заглавие*: Головина, Л., Яглом, И. (1961) Популярные лекции по математике“ Москва, ФИЗМАТГИЗ)

Pólya, G. (1954) Mathematics and Plausible Reasoning: I. Induction and analogy in mathematics. II. Patterns of plausible inference. Princeton University Press, New Jersey

Sominskii, I. (1965) Method of mathematical induction, Moscow, Science (*Оригинално заглавие*: Соминский, И. (1965) Метод математической индукции, Москва, Наука)

Vavilov, V., Melnikov, I., Olehnik, S., Pasichenko, P. (1987) Matematical problems: ALGEBRA, Moscow, Science (*Оригинално заглавие*: Вавилов, В., Мельников И., Олехник С., Пасиченко П. (1987) ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ: АЛГЕБРА, Москва, Наука)

VRDA, A. (1977) Princip Matematicke Indukce, Mlada fronta, Praha

<https://www.matematika.bg/olimpiadi/teoria/matematicheska-indukcia.html> (06.03.2024)

http://www.math.bas.bg/omi/nso/docs/2017/Tanya_Manolova-NSO2017.pdf (08.03.2024)

<http://fmi.wikidot.com/chm2> (03.05.2024)

https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction (30.09.2024)