

FRI-2G.405-1-ERI-04

TECHNOLOGICAL MODEL OF A LESSON ON THE TOPIC "PERMUTATIONS, VARIATIONS AND COMBINATIONS"⁴

Pr. Assist. Prof. Desislava Georgieva, PhD

Department of Algebra and Geometry

Faculty of Mathematics and Informatics

St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Bulgaria

Phone: +359 887 244 498

E-mail: d.georgieva@ts.uni-vt.bg

Abstract: A technological model for training on the topic "Permutations, variations and combinations without repetitions" has been developed, for immediate application in the learning process. The model combines traditional teaching methods with the use of modern tools and resources. A technological map, a plan-scheme and a presentation for the lesson are described. At the beginning, a problem situation is set, which is solved after studying the new knowledge and acquired skills for recognizing the type of compounds. An educational discussion looks for analogies and differences between the three types of compounds by visualizing them and using the "colour coding" method. Definitions and formulas are reached with the help of induction. In addition to scientific knowledge, accessible rules for compound recognition and compound number determination are also provided. Combinatorics is presented to students in an accessible and intriguing way.

Key words: Education, Application of Combinatorics, Technology map, Lesson plan, Presentation, Permutations, Variations Combinations, SmarTest.

ВЪВЕДЕНИЕ

Комбинаториката намира приложение в различни области на науката и практиката като: Теория на кодирането и криптографията; определяне сложността на алгоритми за софтуерни програми; Теория на вероятностите; организация на бази данни; изследване на социални мрежи и др. Тя е представена по достъпен и заинтригуващ начин на обучаваните от 8. клас. Разработени са *Технологичен модел* за обучение по темата „Пермутации, вариации и комбинации без повторения“, и електронен тест⁵. Структурата на образователната технология има три части, съответстващи на етапите за развиване на критичното мислене в урок по математика (Galabova, Beykov, 2009). Авторската технология осигурява развиване на проблемност, вникване в причинно-следствени връзки, системност и достъпност, самостоятелност и рефлексивност на мисленето на учениците чрез 12 задачи и 5 визуализации.

ИЗЛОЖЕНИЕ

**1. Конструирание на Технологична карта на урока по модел на Д. Гълъбова (2008).
Технологична карта „Пермутации, вариации и комбинации“**

1. ОБРАЗОВАТЕЛНИ ПАРАМЕТРИ: Уч. прогр. за 8. клас	2. ОБЛАСТ НА КОМПЕТЕНТНОСТ: Елементи от вероятности	3. РАЗДЕЛ: Основни комбинаторни понятия
ТЕМА на урока	<i>Пермутации, вариации и комбинации без повторения</i>	
ВИД на урока	Урок за нови знания	
ЦЕЛИ на урока	Формиране на компетентности	Нови понятия в урока
Развиване на компетентности на	- разпознава съединението; - разбира процеса на извод на	<i>пермутация, вариация и комбинация</i>

⁴ Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 25 октомври 2024 г. в секция „Образование – изследвания и иновации“ и е с оригинално заглавие на български език: ТЕХНОЛОГИЧЕН МОДЕЛ НА УРОК НА ТЕМА „ПЕРМУТАЦИИ, ВАРИАЦИИ И КОМБИНАЦИИ БЕЗ ПОВТОРЕНИЯ.

⁵ <https://www.smartest.bg/dgeorgieva3592/test-po-matematika-za-8-klas-kombinatorika-7-min-147884>

ученика	формулите; - прилага формулите за пермутации, вариации и комбинации без повторения;	
Учебни методи	Методи в традиционното обучение	Методи за активно обучение с ИКТ
	дискусия, наблюдение, сравнение, абстрахиране, обобщение (синтез), контрол, преценка, упражнение	- компютърна урочна презентация; - използване на онлайн калкулатор
Учебни ресурси	учебник, тетрадка, химикал, цветни маркери	- проектор; - компютри или смартфони;
Интегративни връзки	Вътрешнопредметни връзки	Междупредметни връзки
	аритметика, вероятности	ИТ, биология
2. ОРГАНИЗАЦИОННИ КОМПОНЕНТИ		
2.1. Събуждане на интереса	Дейност на учителя - поставя проблемна ситуация.	Дейности на учениците - участват в беседата.
2.2. Запознаване с нови знания и умения	- предоставя примери за приложение; - изисква наблюдение, анализ, сравнение, обобщение, синтез; - ръководи формулирането на определения и формули.	- участват активно в познавателна беседа; - анализират и синтезират; - прилагат знанията; - формулират определения; - извеждат формули;
2.3. Дейности за затвърдяване и разширяване на компетенциите по темата	- задава система от задачи; - съставя допълнителни задачи; - показва онлайн калкулатор за проверка.	- разпознават вида на съединенията; - прилагат новите знания; - решават задачи и тестове; - използват онлайн калкулатор.
3. РЕФЛЕКСИЯ		
3.1. Рефлексия над дейността на учениците	Дейност на учителя - води беседа - подбира и предлага система от задачи; - наблюдава; - контролира; - коригира; - изказва обратна връзка.	Дейности на учениците - преценяват дали разбират изученото; - установяват могат ли да определят вида на съединенията чрез кратък електронен тест по темата; - преценяват резултатите си, пропуските и затрудненията.
3.2. Личностна и интелектуална рефлексия над резултатите	- преосмисля използваните методи и дейности; - търси причини за пропуските в краткия тест; - набелязва дейности за преодоляване на пропуските.	- преценяват дали осъзнават ролята на комбинаториката; - оценяват правилно ли прилагат знанията от урока; - съпоставят с резултатите на съучениците си.

2.2. Запознаване с нови знания и умения

Заглавието на урока се съобщава и се визуализира на дисплея/ проектора. На един слайд са изписани три подобни задачи, но с различни съединения (Фиг. 1.). Ключовите думи

от текста са оцветени по методически модел „Цветово кодиране“ (Георгиева, 2023). С познавателна беседа учениците анализират текста и откриват по какво се различават задачите. Следва подредено визуализиране (Фиг. 2.) на всички пермутации от задача 1. и в тетрадките с цветни маркери. Решават задача от генетиката за пермутация с 4 елемента (Фиг. 3.). Отговарят на въпрос за класиране на 10 участника в състезание. Подпомогнато достигат до извод на определението и формулата за пермутации (Фиг. 4.).

Сравнете задачите:

Задача 1. В кош има жълта, синя и червена топка. **Последователно** се изваждат **всички** топки, като се **подреждат** в редица до стената. По колко начина могат да се подредят?

Задача 2. В кош има жълта, синя и червена топка. **Последователно** се изваждат **две** топки като се **подреждат** в редица до стената. По колко начина могат да се подредят?

Задача 3. В кош има жълта, синя и червена топка. **Едновременно** се изваждат **две** топки и се хвърлят. По колко начина може да се извърши?

Фиг. 1. Три вида съединения

Задача 1а. В един ген се намират 4 различни алела: А, В, С, и D. Всеки от тези алели може да заеме една позиция в хромозомата. Колко различни начина съществуват за подреждането на тези 4 алела в хромозомата?

- Колко възможности има за първия алел? А за втория?...
- Какво трябва да направим тези възможности?
- 4.3.2.1 = 6 възможности**
- Сравнете с предходната задача.
- Как ще намерим по-колко различни начина ще се класират 10 участника в състезание?
- До какъв извод достигаем? Ако предметите са n на брой как ще запишем?

Фиг. 3. Извод в общия случай

Задача 1. В кош има жълта, синя и червена топка. **Последователно** се изваждат **всички** топки, като се **подреждат** в редица до стената. По колко начина могат да се подредят?

- Колко възможности има за първата топка? А за втората, след като сме махнали една? А за третата?
- Какво трябва да направим тези възможности? Спомнете си!
- За всеки избор на първата топка, колко избора имаме за втората?
- Ако сме поставили първо жълтата, за втората можем да изберем от синята или червената.
- Какво направихме с възможностите, събрахме ли ги или ги умножихме? Как ще запишем решението?

3.2.1 = 6 възможности



Фиг. 2. Илюстриране на пермутациите

Запишете правилото:

- Съединения (групи), при които **подреждаме всички** налични елементи се наричат **пермутации (P)**.
- В общия случай, ако има n на брой елемента ще пресметнем $P_n = n \cdot (n - 1) \dots 3.2.1$.
- Този дълъг запис по-кратко се записва с $n!$ и се чете **n -факториел**.

Фиг. 4. Определение и формула за пермутации

Продължават с решаването на втора задача и друга задача (за десерти) от вероятности, защото при тях отново е от значение наредбата на елементите (Фиг. 5. и Фиг. 6.). Илюстрират всички съединения от втора задача. В групова работа обучаваните са стимулирани да зададат подходящи въпроси за достигане до решението. Заедно извеждат формулата за вариации (Фиг. 7.). Решават задача 3. с текст подобен на задача 2., при която не е от значение реда на елементите – топките се изваждат едновременно и не се подреждат (Фиг. 8.). Разсъждават върху задача 3а., подобна на задача 2а., в която плодовете са разбъркани (Фиг. 9.). Откриват аналогии и разлики с предходните задачи (2а. и 3.). Задават насочващи към решението въпроси. Отговарят на: „Колко мелби от задача 2а., като ги разбъркаме, ще станат еднакви? На колко ще разделим броя на всички подредени съединения, за да получим броя на неподредените?“. Формулират определението. За конкретни числа изказват: „Ако от 4 топки трябва да извадим 3, без значение на реда, съединенията наричаме комбинации от 4 елемента, 3-ти клас.“ (Фиг. 10.).

Задача 2. В кош има жълта, синя и червена топка. **Последователно** се изваждат **две** топки като се **подреждат** в редица до стената. Колко са начините?

Открийте аналогията и разликата с предходните задачи:

- Прилича ли на задачата за образуването на числата от предходния учебен час? Ако вместо топки в условието пише числа, от колко цифри, какви числа трябва да образуваме?
- От значение ли е редът на цифрите, в случая топките?
- Как ще изобразим тази задача?



Фиг. 5. Въвеждане на вариации

Задача 2а. За да направят мелба поставят в чашата върху сладоледа **три** слоя плодове. В кухнята разполагат със **7** вида плодове. Колко различни мелби могат да направят?

- Открийте аналогията и разликата с предходната задача. Има ли подредбата на слоевете? Задайте подходящи въпроси, за да решите задачата.
- За първия слой от колко възможности избират?
- За втория слой колко възможности остават?
- За третия слой колко възможности има?
- Какво трябва да се направи – да се съберат или да се умножат?
- Отговор: **7.6.5 = 210 вида мелба**
- До какво обобщение достигаем? Как ще намерим колко са вариантите, ако от n елемента трябва да подредим k на брой?

Фиг. 6. Обобщение за вариации

Запишете правилото:

- Съединения, при които **нареждаме част** от елементите се наричат **вариации (V)**. Ако има n на брой елемента и се подреждат k от тях.

$$V_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots}_{k \text{ множителя}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1);$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ където } n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n.$$

Фиг. 7. Определение и формула за вариации

Задача 3. В кош има жълта, синя и червена топка. **Едновременно** изваждаме **две** топки и ги подаваме на децата. Намерете по колко начина може да стане това.

- По какво тази задача се различава от предходните?
- Има ли значение редът в третата задача?
- До какво заключение достигаме?
- Два** варианта от втора задача ще ги броим за ...? Следователно всички варианти, които намерихме във втора задача, на колко ще ги разделим?



$$\frac{3.2}{2} = 3 \text{ начина}$$

Фиг. 8. Илюстриране на комбинации

Задача 3а. За да направят мелба, към сладоледа добавят **разбъркани три** вида плодове. В кухнята разполагат със **7** вида плодове. Колко различни мелби могат да направят?

- Открийте аналогии и разлики с предходните задачи. Има ли подредбата на словесно? Задайте подходящи въпроси, за да решите задачата.
- За първи вид плодове от колко възможности избират?
- За втори вид плодове колко възможности остават?
- За третия вид колко възможности има?
- От значение ли е подредбата?
- Колко мелби от задача 2а., като ги **разбъркаме** ще станат еднакви?
- На колко ще разделим броя на всички подредени съединения, за да получим броя на неподредените?

Отговор: $\frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$ **вида мелби**

Фиг. 9. Задача от комбинации

Съединения, при които **групираме част** от наличните елементи се наричат **комбинации (C)**.

- Ако трябва да подредим две от две топки, това са ...? Как пресмятаме?
- Ако трябва да подредим две от три, това са ...? Как пресмятаме?
- Ако от **4** топки трябва да извадим **3**, без значение на реда, това са ...?
- Последния случай наричаме комбинации от **4 елемента, 3-ти клас**.
- Как ще пресметнем? Какво направихме в трета задача?
- Броя на всички вариации разделихме на броя на повтарящите се съединения.
- В случая, когато се изваждат две топки от четирите разделихме на $2! = 2.1$, а в този случай ще разделим на ...?

Фиг. 10. Определение за комбинации

Решават още една задача, защото формулата за комбинации е по-сложна (Фиг. 11.). На база трите решения извеждат правило на достъпен за тях език (Фиг. 12.).

2.3. Дейности за затвърдяване и разширяване на компетенциите по темата

Обобщават правилата за разпознаване на съединения, за да ги запомнят и прилагат (Фиг. 13.). Учениците са приканени да посочат и други приложения на комбинаториката. За да се мотивират, допълнително се разделят на три групи и решават по една задача с различен контекст, която записват на дъската (Фиг. 14.). Връщат се на задачата от началото на часа (Фиг. 15.). За трайност комбинаторните съединения се визуализират и се предлагат мнемонични правила (Фиг. 16.).

Задача 3б. От кутия с 10 различни топчета се изваждат 4 без значение на реда. Колко различни варианта има?

- Назовете вида на съединенията.
- Ако има значение редът, съединението ще наричаме ...?
- На колко да разделим, за да получим комбинациите?
- Колко вариации считаме за една комбинация?

Фиг. 11. Трета задача от комбинации

Съединения, при които **групираме (без да подреждаме) част** от наличните елементи се наричат **комбинации (C)**.

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_n} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

където $n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$.

В задачите пресметнахме:

$$\frac{3.2}{2.1}, \quad \frac{7.6.5}{3.2.1}, \quad \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1}$$

В числителя започваме от числото n , намаляваме с едно всеки следващ множител. Записваме k на брой множителя. В знаменателя множителите са от k до 1.

Фиг. 12. Формула и правило за намиране на комбинации

Правила за разпознаване на съединения

- Когато **не се подреждат** елементите, съединенията са **комбинации**.
- Когато е важен **редът** (наредбата) на елементите, тогава случаят е от **пермутации** или **вариации**.
- Когато се подреждат **всички** елементи – **пермутации**, когато **не се подреждат всички** елементи – **вариации**.



Фиг. 13. Обобщени правила

Задача 4. В една лаборатория се изследват различни комбинации от генетични маркери. Учен разполага с 6 различни маркера и иска да избере и подреди 3 от тях, за да създаде тест за определено генетично заболяване. Колко различни начина има да се изберат и подредят 3 маркера от наличните 6?

Задача 5. В едно училище има следните клубове – спортен, театрален, музикален, литературен, природонаучен и математически. В края на учебната година училището организира специален ден, в който учениците могат да посетят до 3 различни клуба. По колко различни начина един ученик може да избере кои 3 клуба да посети, ако не се допуска повторение на клубовете?

Задача 6. Автосалон предлага на своите клиенти оферта, при която всеки клиент може да избере 3 различни функции за своя нов автомобил от следните: спортен режим; навигационна система; аудиосистема премиум клас; панорамен покрив; адаптивен круиз контрол. Трите функции ще бъдат инсталирани в автомобила в зависимост от последователността на избора им, като първата избрана функция ще се счита за най-важна и на нея ще се акцентира. По колко различни начина клиент може да избере и подреди 3 функции от общо 5 налични?

Фиг. 14. Задачи за затвърдяване

Задача 7. „На конкурс за най-добър десерт всеки участник трябва да приготи 3 различни вида сладкиши, като има възможност да избира от: торта, мъфини, бисквити, еклери, кекс, пай и мелба. По колко различни начина участник може да избере да приготи 3 различни вида сладкиши от наличните 7? След като ги приготи, по колко различни начина може да ги подреди на масата си?“

Решение:

Участник избира да приготи 3 вида сладкиши от 7, без значение на реда – комбинация от 7 елемента, 3-ти клас.

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ начина.}$$

Всяко от тези съединения подрежда (пермутация) по $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начина. Следователно всичките възможни подреждания са $V_3^3 \cdot P_3 = 35 \cdot 3 = 105$

Отговор: Може да подреди 3 от всички десерти по 105 начина.

Фиг. 15. Проблемна задача

Как да се досещаме?



Фиг. 16. Правилата – визуално и мнемонично

3. Рефлексия над дейности и над резултатите

През целия учебен час обучаващият преценява степента на разбиране на учебното съдържание, като се основава на отговорите и невербалните реакции на учениците. В края проверява новите знания и умения със 7-минутен тест, създаден в платформата SmarTest (Фиг. 17). Той съдържа две задачи само за посочване на вида на съединението; една задача за свързване на двойките и две задачи с кратки изчисления на броя на съединенията. При натискане на бутона за предаване, всеки ученик незабавно вижда своите резултати. За приключилите теста има допълнителна задача с друга тематика (българска шевица), която е със същата сложност като на стартовата задача (Фиг. 18). Учителят изказва кратка оценка на работата на учениците. Задава за домашна работа да проучат „Български спортен тотализатор“, да пресметнат с онлайн калкулатори⁶ броя на съединенията, да съставят и решат две задачи от комбинаторика. Следващият учебен час се извършва пропеедвтика на вероятности; учениците разменят условията на съставените от тях задачи и ги решават.

Свържи съединението с определението

Избиране на определен брой елементи от множество и подреждането им.	Вариации
Избиране на определен брой елементи от множество без значение на реда.	Комбинации
Подреждане на всички елементи от дадено множество.	Пермутации

Колко начина има да изберем 2 играча от 5, за да участват в турнир, без значение на реда?

10

Фиг. 17. Тестови въпроси

Допълнителна задача: Майсторка на българска шевица разполага с 5 различни елемента за бродирание: канатича, елбетица, дърво на живота, магически квадрат и звезда. По колко различни начина може да избере и подреди 3 от тези 5 елемента в редица? Ако майсторката иска да включи задължително „канатича“ в своята редица, колко различни комбинации може да направи?

Решение: Първо избираме 3 елемента от 5 с комбинации без повторение:

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

След това подреждаме тези 3 елемента в редица – пермутации $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Общият брой на възможните редици е: $C_5^3 \cdot P_3 = 10 \cdot 6 = 60$

Броя комбинации, включващи задължително „канатича“:

Избираме 2 елемента от останалите 4:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

Подреждаме тези 3 елемента (включително „канатича“) в редица: $P_3 = 3! = 6$

Общият брой на възможните редици е: $C_4^2 \cdot P_3 = 6 \cdot 6 = 36$

Фиг. 18. Проблемна задача

⁶ <https://bg.foxcalculators.com/math/23758.html>;
<https://www.calculatored.com/lang/bg/combinacion-calculator>

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Технологичната карта на урок е средство, което помага да се структурира правилно урока и дейностите в него. Подходящо е запознаване с трите вида съединения без повторения в един урок, защото така могат да бъдат сравнени и разграничени. Освобождават се няколко учебни часа за упражнения и съставяне на задачи от учениците. Необходимо е: задачите да са от различен контекст и да измерват различни равнища от таксономията на Б. Блум; отделните стъпки в презентацията да се извеждат поетапно в точния момент; да се показва приложението на комбинаториката; учениците сами да съставят, разменят и решават комбинаторни задачи. Традиционните методи да се съчетават умело с възможностите на новите технологии.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2024-ФПНО-03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

Искрено благодаря на проф. д-р Д. Гълъбова за споделения опит и знания.

REFERENCES

Galabova, D. (2008). A Guide for Trainee Mathematics Teachers. V. Tarnovo: University Publishing House “St. St. Cyril and Methodius” (**Оригинално заглавие:** Гълъбова, Д., 2008. *Ръководство за стажант-учители по математика*. В. Търново: Университетско издателство „Св. св. Кирил и Методий“.)

Georgieva, D. (2023). Technological model of a lesson on the topic “Collection and multiplication of possibilities”. *Proceedings of the 62-th Annual Scientific Conference of Angel Kanchev University of Ruse and Union of Scientists – Ruse*, 62 (6.4), pp. 12–19, ISSN 1311-3321.

Stoilkova Ts., (2024). *Collection of detailed solved problems in combinatorics and probability*, ISBN 9549008445 (**Оригинално заглавие:** Стоилкова Ц., 2024. *Сборник подробно решени задачи по комбинаторика и вероятности*.)

Galabova, D. & Beykov M. (2009). Interactive educational technologies for stimulating critical thinking in the study of “Congruences” (8th grade) Part One. Axis symmetry and its properties. *Mathematics and Informatics*, 4, 15-23 (**Оригинално заглавие:** Гълъбова, Д, Бейков, М., 2009. *Интерактивни образователни технологии за стимулиране на критическото мислене при изучаване на „Еднаквости“ (8. клас) Първа част. Осева симетрия и нейните свойства*. Математика и информатика, 15-23.)